Е. С. Березанская и Ф. Ф. Нагибин

СБОРНИК ВОПРОСОВ и УПРАЖНЕНИЙ ПО АЛГЕБРЕ и ТРИГОНОМЕТРИИ

ПОСОБИЕ
ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ
СРЕДНЕЙ
ШКОЛЫ

Учпедгиз – 1955

Е. С. БЕРЕЗАНСКАЯ и Ф. Ф. НАГИБИН

СБОРНИК
ВОПРОСОВ и УПРАЖНЕНИЙ
ПО АЛГЕБРЕ
И ТРИГОНОМЕТРИИ

ДЛЯ VIII—X КЛАССОВ
СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

ПОСОБИЕ ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ

Утверждено
Министерством просвещения РСФСР

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
УЧЕБНО-ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИНИСТЕРСТВА ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР
Москва * 1955

Елизавета Савельевна Березанская и *Федор Федорович Нагибин.*
Сборник вопросов и упражнений по алгебре и тригонометрии.

Редактор *Н. И. Лепешкина.* Техн. редактор *И. В. Рыбин.*

Сдано в набор 1/IX 1954 г. Подписано к печати 15/XI 1954 г. А07748.
Тираж 60 000 экз. Бумага $84\times108^{1}/_{32}$. Печатных листов 10 (8,2).
Уч.-изд. листов 8. Зак. № 151. Цена без переплета 2 р. 15 к.
Переплет 50 к.
Учпедгиз. Москва, Чистые пруды, 6.

5-я типография треста Росполиграфпром.
Свердловск, ул. имени Ленина, 49.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Стр.

Введение 3

АЛГЕБРА

Глава I. Упражнения для повторения 7
Глава II. Иррациональные числа 10
Глава III. Степени и корни 13

§ 1. Степень с целым положительным показателем . . . . —
§ 2. Квадратные корни . . . . . —
§ 3. Корни с целым положительным показателем 15
§ 4. Тождественные преобразования иррациональных выражений 16

Глава IV. Квадратные уравнения и уравнения высших степеней, сводящиеся к квадратным 19

§ 1. Квадратные уравнения 20
§ 2. Составление квадратных уравнений по условиям задач 23
§ 3. Исследование квадратных уравнений . . . . . —
§ 4. Квадратный трехчлен 27
§ 5. Биквадратные уравнения 28
§ 6. Неравенства I степени 30
§ 7. Иррациональные уравнения 31

Глава V. Функции и их графики 32

§ 1. Прямоугольные координаты на плоскости 33
§ 2. Понятие множества 34
§ 3. Понятие функции. Прямая и обратная пропорциональность 36
§ 4. Линейная функция 39
§ 5. Квадратичная функция 41
§ 6. Алгебраические функции 42
§ 7. Иные виды функций 44

Глава VI. Системы уравнений второй степени 45
Глава VII. Последовательности чисел 49

§ 1. Последовательность чисел . . . . . —
§ 2. Арифметическая прогрессия 51
§ 3. Геометрическая прогрессия 54
§ 4. Понятие предела 56
§ 5. Бесконечная убывающая геометрическая прогрессия . 59

Стр.
Глава VIII. Обобщение понятия степени 61
Глава IX. Показательная и логарифмическая функции 63
§ 1. Показательная функция . . . . . —
§ 2. Понятие обратной функции 66
§ 3. Логарифмическая функция 68
Глава X. Логарифмы 70
§ 1. Понятие логарифма . . . . . —
§ 2. Логарифмирование и потенцирование 72
§ 3. Логарифмы чисел при различных основаниях 73
§ 4. Десятичные логарифмы 75
§ 5. Различные системы логарифмов 77
§ 6. Показательные и логарифмические уравнения 78
Глава XI. Соединения и формула степени бинома 80
§ 1. Соединения . . . . . —
§ 2. Задачи на вычисление вероятностей 84
§ 3. Формула степени бинома 87
§ 4. Метод математической индукции 88
Глава XII. Комплексные числа 89
§ 1. Комплексные числа . . . . . —
§ 2. Понятия кольца и поля 96
Глава XIII. Уравнения высших степеней и неравенства . . . 98
§ 1. Равносильные уравнения и неравенства . . . . . —
§ 2. Исследование уравнений первой и второй степеней 101
§ 3. Трехчлены и неравенства второй степени 103
§ 4. Делимость многочленов 107
§ 5. Алгебраические уравнения 110

ТРИГОНОМЕТРИЯ

§ 1. Тригонометрические функции острого угла 116
§ 2. Измерение дуг и углов 118
§ 3. Тригонометрические функции 122
§ 4. Зависимости между тригонометрическими функциями 129
§ 5. Формулы приведения 132
§ 6. Формулы сложения. Формулы двойного и половинного аргументов 134
§ 7. Преобразование суммы тригонометрических функций в произведение и обратно 138
§ 8. Обратные тригонометрические функции 140
§ 9. Тригонометрические уравнения 146
§ 10. Задачи 152

ВВЕДЕНИЕ

1. Настоящий «Сборник вопросов и упражнений по алгебре и тригонометрии» для VIII, IX и X классов средней школы в значительной своей части является продолжением пособия тех же авторов «Упражнения для устных занятий по алгебре в VI—VII классах». Основное содержание этого сборника — вопросы и упражнения, предназначенные для устного разбора и выполнения на уроках алгебры и тригонометрии в старших классах средней школы. Специфика изучаемых в этих классах разделов школьной программы и возрастные особенности учащихся VIII—X классов заставили авторов включить в настоящий сборник вопросы и упражнения для «полуписьменного», а некоторые и для письменного выполнения. В противном случае по отдельным разделам программы трудно было бы дать целостные подборы упражнений.

2. Длительное изучение опыта преподавания математики в советской средней школе привело авторов к выводу, что одним из наиболее существенных недостатков преподавания алгебры и тригонометрии является поверхностное усвоение учащимися ведущих понятий этих учебных предметов. Если формальной стороне, технике вычислений, преобразований и т. д., уделяется в нашей школе значительное внимание, то содержательная сторона, усвоение основных понятий и связей между ними, все еще остается в тени. Распространенная учебная литература по алгебре и тригонометрии в этом отноше-

нии оставляет желать лучшего. Чтобы помочь нашей школе быстрее избавиться от указанного недостатка, полезно предложить учителю математики такое пособие, в котором усвоение основных понятий школьного курса алгебры и тригонометрии было бы выдвинуто на первый план. Вот эту задачу, в качестве основной, и ставили перед настоящим сборником авторы его.

3. Материал в этом сборнике по содержанию и расположению за малыми исключениями соответствует ныне действующей программе. Небольшие отступления от действующей программы оказались необходимыми, с одной стороны, для более основательного уяснения учащимися тех основных понятий, о которых говорится в программе, а с другой — для ознакомления учащихся с некоторыми новыми для средней школы понятиями, играющими важную роль в современной математике и более или менее тесно связанными со школьным курсом. Все те параграфы, в которых даны упражнения по вопросам, выходящим за рамки действующей программы, выделены мелким шрифтом. Эти упражнения могут быть использованы учителем преимущественно во внеклассной работе с учащимися при выяснении соответствующих понятий.

4. Имея в виду задачу более основательного раскрытия в школьном курсе алгебры и тригонометрии основных понятий этих учебных предметов, в настоящем сборнике авторы его центральное место отвели вопросам, для ответа на которые нет надобности в сложных выкладках, и упражнениям, выполнение которых либо совсем не требует записей, либо нуждается лишь в кратких записях. Это оправдано тем, что для осознания того или иного понятия более пригодны несложные вопросы и такие упражнения, форма которых не затемняет существа дела, а помогает его выяснению. Авторы настоящего сборника особенно заботились о том, чтобы на сравнительно простом материале можно было развивать мышле-

ние учащихся, их сообразительность, чтобы программный материал учащиеся усваивали сознательно.

5. Вопрос о том, каким приемом выполнить то или иное упражнение данного сборника, должен решаться в каждом отдельном случае самим учителем, с учетом характера упражнения и особенностей класса. Более трудные вопросы и упражнения, а также более громоздкие выделены в задачнике «звездочкой» и предназначаются преимущественно для письменного выполнения.

6. Вопросы и упражнения этого сборника должны предлагаться учащимся для разбора и выполнения не только при первоначальном ознакомлении с программным материалом, но и при закреплении изученного. Вместе с тем настоящий сборник с успехом может быть использован для более глубокой и содержательной проверки знаний учащихся, так как многие упражнения и вопросы могут даваться учащимся при проведении устного опроса и письменных работ. Но особенно большое значение материал этого сборника имеет для проведения систематического повторения ранее пройденных разделов алгебры и тригонометрии. Опыт работы наших школ убеждает в том, что многие понятия школьного курса математики для достаточно серьезного усвоения их требуют неоднократных повторений, не сводящихся к простому воспроизведению ранее изученного, а развивающих и обогащающих знания учащихся. При проведении такого повторения и могут быть использованы многие параграфы этого сборника, причем материал, данный в задачнике, например, для VIII класса, может быть использован при повторении соответствующих разделов в IX и X классах.

7. Методика устного разбора вопросов и выполнения упражнений авторами этого сборника была изложена во введении к «Сборнику», предназначенному для VI и VII классов. Имея в виду специфические особенности предлагаемого здесь материала, ограничимся следую-

щими замечаниями: а) разбор и выполнение предложенных здесь вопросов и упражнений должны стать органической частью уроков алгебры и тригонометрии; б) готовясь к уроку, учителю надлежит заранее подобрать те вопросы и упражнения, которые будут предложены учащимся, выполнить упражнения самому, установить способы ознакомления учащихся с упражнениями и приемы проверки результатов, а также подготовить таблицы, карточки, чертежи, если они будут нужны; в) в данном сборнике значительно больше, чем в сборнике для VI и VII классов, дано таких упражнений, с которыми учащиеся должны знакомиться не по слуху, а с помощью записи на классной доске, с помощью индивидуальных и демонстрационных карточек и разного рода таблиц; г) некоторые упражнения и вопросы могут задаваться учащимся на дом; д) учащиеся должны не только обосновывать свои ответы на вопросы этого сборника, предложенные им учителем, но и иллюстрировать их самостоятельно придуманными несложными примерами.

8. Этот сборник является результатом совместной работы двух авторов: Е. С. Березанской (Московский государственный педагогический институт им. В. И. Ленина) и Ф. Ф. Нагибина (Кировский государственный педагогический институт им. В. И. Ленина). В основном вопросы и упражнения по темам: 1) Упражнения для повторения, 2) степени и корни, 3) квадратные уравнения и уравнения высших степеней, сводящиеся к квадратным (VIII класс), 4) системы уравнений второй степени (VIII класс), 5) логарифмы (IX класс), 6) уравнения высших степеней (X класс), а также вопросы и упражнения по тригонометрии составлены Е. С. Березанской. Вопросы и упражнения по остальным темам курса алгебры составлены, в основном, Ф. Ф. Нагибиным.

Авторы считают своим долгом выразить благодарность С. А. Пономареву и К. П. Сикорскому, прочитавшим рукопись и давшим ряд ценных указаний.

ГЛАВА I. УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. Вычислить: 1) $\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)^2$; 2) $(-0{,}3)^2+1{,}1^2$; 3) $-3+(-3)^2+(-3)^3$; 4) $-(-4)^2:(-0{,}2)^3$.

2. Найти x: 1) $\frac{7ab}{3x}=\frac{2}{5a}$; 2) $\frac{m}{3{,}5}=\frac{x}{4m}$.

3. Найти периметр прямоугольника, длина которого 5,2 *см*, а ширина составляет 20% длины.

4. Найти число, зная, что 10% его составляют 40% от 8,5.

5. Если к числу прибавить 25% его, то получится 62,5. Найти это число и проверить ответ.

6. Если от числа отнять $33\frac{1}{3}$% его, то получится 0,66. Найти это число.

7. Где на числовой оси может лежать точка, изображающая данное число a, если о числе a известно, что 1) $|a|=5$? 2) $|a|<5$? 3) $|a|>5$?

8. Даны два числа $-0{,}3$ и $-0{,}31$. Указать какое-нибудь число: 1) меньше меньшего из данных чисел, 2) больше большего из них, 3) заключенное между данными числами.

9. Назвать числа, противоположные и обратные числам: 1) $-m$; 2) $a-m$.

10. Что можно сказать о сумме двух противоположных чисел? о произведении двух обратных чисел?

11. Всегда ли получается: 1) целое число при выполнении четырех арифметических действий с целыми числами? 2) положительное число при выполнении тех же действий с положительными числами?

12. Четное или нечетное число получится в результате сложения, вычитания и умножения двух четных чисел? двух нечетных чисел?

13. Что можно сказать о коэффициентах многочленов, полученных в результате сложения и перемножения многочленов: 1) с целыми коэффициентами? 2) с четными коэффициентами?

14. Вычислить, пользуясь формулами сокращенного умножения: 1) 65^2; 2) $9{,}5^2$; 3) $(8\frac{1}{2})^2$; 4) $7{,}5 \cdot 8{,}5$; 5) $112 \cdot 88$; 6) $151^2 - 149^2$; 7) $16{,}8^2 - 13{,}2^2$.

15. Разложить на множители: 1) $a^2 - 2ab + b^2 - ac + bc$; 2) $(a + b + c)^2 - (a - b - c)^2$.

16. Зная, что данное выражение представляет собой полный квадрат, сказать, какой член надо поставить вместо «?»: $0{,}09m^4b^2 - 0{,}6m^2b + ?$

17. Вычислить: 1) $(m^2 - mn + n^2)(m + n)$; 2) $m^3 - 3m^2n + 3mn^2 - n^3$ при $m = -8$, $n = -5$.

18. Доказать: 1) $(a + b)^4 - (a - b)^4 = 8ab(a^2 + b^2)$; 2) $\left(\frac{m^2+1}{m}\right)^2 - \left(\frac{m^2-1}{m}\right)^2 = 4$; 3) $\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^2 - \left(\frac{2x}{x^2-1}\right)^2 = 1$[1].

19. При каких значениях a теряют смысл выражения: 1) $\frac{1}{a-2}$? 2) $\frac{3}{a+4}$? 3) $\frac{5}{2a-3}$? 4) $\frac{7}{5-2a}$?

20. При каких значениях a: 1) $\frac{4a-5}{7} = 0$? 2) $\frac{2a+9}{3} = 1$? 3) $\frac{5a-7}{4} = 1$?

21. Сколько сторон у многоугольника, сумма внутренних углов которого: 1) $16d$? 2) $24d$?

22. При каких значениях x: 1) $x + 5 > 0$? 2) $x + 5 = 0$? 3) $x + 5 < 0$? 4) $-2x + 4 < 0$? 5) $-3x + 1 > 0$?

23. Из данных неравенств указать неравенство, решения которого удовлетворяют остальным неравенствам: 1) $a > 0{,}03$, $a > -2$, $a > 0{,}025$; 2) $b > -3$, $b > -5$, $b > -9$; 3) $c < 0{,}03$, $c < -2$, $c < 0{,}025$; 4) $d < -3$, $d < -5$, $d < -9$.

Пояснить свой ответ на числовой оси[2].

24. Какие целые значения может принимать x, если известно, что: 1) $0 < x < 3{,}5$? 2) $-5 < x < 0$? 3) $x < 7{,}2$ и $x > 3{,}6$? 4) $x < 2{,}2$ и $x > -3$?

25. Привести примеры, когда $-(a + b)$: 1) число положительное, 2) равно 0.

---

[1] Выписать данные упражнения на доске. Решить устно.

[2] Заготовить изображение числовой оси, которое может быть использовано при ответе на вопросы многих упражнений.

26. При каких значениях y: $x+y<x-y$? Привести пример.

27. Что можно сказать о знаках чисел m и n, если 1) $mn>0$? 2) $\frac{m}{n}<0$?

28. Указать формулу для перевода числа: 1) пудов (x) в килограммы (y), если 1 пуд $\approx 16{,}38$ *кг*; 2) дюймов (x) в миллиметры (y), если 1 дюйм $\approx 25{,}4$ *мм*; 3) десятин (x) в гектары (y), если 1 десятина $\approx 1{,}093$ *га*.

29. Найти наибольшее значение дроби $\frac{1}{1+n^2}$. Почему эта дробь не может принимать отрицательные значения?

30. Данные уравнения решить относительно каждой из входящих букв[1]: 1) $S=v_0+gt$; 2) $Q=\frac{a\cdot h}{2}$; 3) $S=\frac{(a+b)h}{2}$; 4) $x=m\cdot c\,(T-t)$; 5) $Q=\pi r^2$; 6) $S=\frac{1}{2}gt^2$; 7) $V=\pi R^2\cdot H$; 8) $V=a^2b$; 9) $V=a^3$.

31. Между какими числами заключаются квадраты всех правильных дробей?

32. Какой знак у результата: 1) $(-0{,}4)^5$? 2) $-(-2)^7$?

33. Что больше: 1) $0{,}0016^3$ или $0{,}002^3$? 2) $0{,}5^{3+3}$ или $0{,}5^{3\cdot 3}$?

34. Вычислить: -2^8; $(-2)^8$; -2^9; $(-2)^9$. Что можно сказать о знаках чисел: $-a^n$ и $(-a)^n$, где n — число натуральное?

Указание. Рассмотреть $n=2k$ и $n=2k+1$.

35. Сформулировать правило, выраженное равенством: 1) $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$; 2) $(ab)^n=a^nb^n$. Привести примеры.

36. Могут ли числа, которые оканчиваются цифрами 3, 7, 24, 15, 51, 49, быть точными квадратами целых чисел? Объяснить ответ.

37. Как проверить, правильно ли найден квадратный корень из числа? кубический корень?

38. Произведение числа на $12\frac{1}{2}\%$ его составляет 0,18. Какое это число?

39. Решить уравнения: 1) $(x-5)\cdot(x+3)=0$; 2) $9x^2-169=0$.

40. К квадрату какого числа надо прибавить 4, чтобы получить 20? Сколько таких чисел?

---

[1] Выписать данные упражнения на доске или на заготовленной таблице.

41. Площадь квадрата 2,56 *кв. см*. Найти его периметр.

42. Основание прямоугольника 3,6 *дм*, высота 2,5 *дм*. Найти сторону квадрата, площадь которого равна площади данного прямоугольника.

43. Площадь круга $\approx 3{,}14\,r^2$, где r его радиус. Найти r, если площадь круга 12,56 *кв. см*.

44. Как изменится площадь круга, если его радиус увеличить в 2, 3, 4 раза?

45. Объем куба 0,729 *куб. м*. Найти его ребро. Как изменится объем куба, если ребро его удвоить? утроить?

46. Какое число надо возвысить в куб, чтобы получить: 1) $-\frac{1}{343}$? 2) $-0{,}027$? 3) $-\frac{125}{216}$? 4) $-4\frac{17}{27}$?

ГЛАВА II. ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

1. Известно, что любое рациональное число может быть представлено в виде $\frac{p}{q}$, где p и q — целые числа и $q \neq 0$. Представить в указанном виде: 1) 0,37; 2) -5; 3) 0; 4) $-3\frac{4}{5}$; 5) $-27{,}35$.

2. Привести примеры: 1) конечной десятичной дроби, 2) чистой десятичной периодической дроби, 3) смешанной десятичной периодической дроби.

3. Привести примеры обыкновенных дробей, которые выражаются конечными десятичными дробями. Обосновать ответ.

4. Почему в том случае, когда обыкновенная дробь выражается бесконечной десятичной дробью, эта дробь обязательно оказывается периодической? Для иллюстрации ответа привести пример.

[Остатки при делении числителя на знаменатель обязательно будут повторяться.]

5. Какой — чистой или смешанной, положительной или отрицательной периодической десятичной дробью выражается дробь: 1) $\frac{2}{3}$? 2) $-\frac{3}{7}$? 3) $\frac{7}{30}$?

6. Какое число выражает любая бесконечная десятичная периодическая дробь?

7. Какое рациональное число выражает дробь: 1) 0,3333...? 2) 0,666...? 3) 0,111...? 4) 0,222...? 5) 0,444...?

6) 0,888...? 7) 0,010101...? 8) 0,080808...? 9) 0,050505...? 10) 0,121212...? Как проверить ответы?

8. 1) Указать какие-нибудь рациональные числа, заключенные между двумя данными рациональными числами: 1) 2, 4; 2) -3, -2; 3) 0, 0,5; 4) r, s, $r < s$. 2) В каждом из этих случаев вставить между данными числами их среднее арифметическое.

9. Доказать, что сумма, разность, произведение и частное (если делитель отличен от 0) двух рациональных чисел $\frac{m}{n}$ и $\frac{p}{q}$ — рациональное число.

10. Привести примеры несоизмеримых отрезков. Может ли отношение двух несоизмеримых отрезков быть равным рациональному числу?

11. Если два данных отрезка несоизмеримы, то могут ли оказаться соизмеримыми: один из этих отрезков и 1) половина второго? 2) третья часть второго? 3) n-я часть второго?

12. Если на числовой прямой от нулевой точки отложить отрезок, равный диагонали такого квадрата, сторона которого равна единице масштаба, то получится, как известно, точка, не изображающая рационального числа. Будет ли изображать рациональное число середина этого отрезка? Почему можно утверждать, что на числовой прямой имеется бесконечно много точек, не изображающих рациональных чисел?

13[1]. Соизмеримы ли: 1) гипотенуза и катеты прямоугольного треугольника, если один из острых углов его равен 30°? 2) гипотенуза и катеты прямоугольного треугольника, если катеты этого треугольника равны 7 и 10 единицам длины? 3) сторона и высота равностороннего треугольника? 4) площади правильных вписанных в один и тот же круг треугольника и четырехугольника? 5) длина окружности и диаметр этой окружности?

14. Указать, какие из данных бесконечных десятичных дробей выражают рациональные числа, какие иррациональные: 1) 0,010101...; 2) 0,010010001...; 3) 5,32121212...; 4) 5,3212412441244412444 41...; 5) 7,23636363...; 6) $1,41421... = \sqrt{2}$; 7) $\pi = 3,14159265358...$; 8) $1,7320... = \sqrt{3}$; 9)[1] $e = 2,718281828459...$

[1] Упражнение для учащихся IX класса.

15. Привести примеры таких уравнений, для решения которых требуются иррациональные числа.

[Например, $x^2 - 2 = 0$].

16. Существует ли рациональное число, квадрат которого был бы равен: 1) 2? 2) 3? 3) 4? 4) 5? 5) p, где p — простое число?

17. Каким числом (рациональным или иррациональным) выражается длина гипотенузы равнобедренного прямоугольного треугольника, если длина каждого катета его: 1) принимается равной 1? 2) выражается числом $\sqrt{2}$?

18. Почему сумма и разность двух чисел не могут быть рациональными числами, если одно из данных чисел иррационально, а другое рационально? Привести примеры.

19. Пусть x — рациональное число, а y — иррациональное. В каком случае $x \cdot y$ и $\frac{x}{y}$ будут рациональными числами?

[При $x = 0$ произведение и частное будут равны 0].

20. Привести примеры, показывающие, что произведение и частное иррациональных чисел могут быть рациональными числами.

21. Показать на примерах, что: 1) сумма двух иррациональных чисел может быть рациональным числом; 2) разность двух иррациональных чисел может быть рациональным числом.

Указание. Можно подобрать две десятичные бесконечные непериодические дроби так, что сумма (разность) их будет периодической дробью, например,

$$\begin{array}{r} 0{,}12102100210002\ldots \\ \underline{0{,}43453455345553\ldots} \\ 0{,}55555555555555\ldots \end{array}$$

или иначе: $(2+\sqrt{2})+(2-\sqrt{2})$ и $(2+\sqrt{2})-(-2+\sqrt{2})$.

22[1]. Показать, что любое иррациональное число, например π, может быть приближенно с точностью до 1; 0,1; 0,01 и т. д. выражено с помощью рациональных чисел.

23. Сравнить по величине действительные числа: 1) 0,242342114... и 0,242142114...; 2) $\frac{1}{3}$ и 0,33314; 3) $\frac{2}{3}$ и 0,666...; 4) 3,14159265358... и $\frac{22}{7}$.

[1] Использовать упражнение в IX классе при повторении.

24. Сформулировать теоремы планиметрии (стереометрии), в доказательстве которых используют определение равенства иррациональных чисел.

ГЛАВА III. СТЕПЕНИ И КОРНИ

§ 1. Степень с целым положительным показателем

1. Возвести в квадрат: 1) $a+b-c$; 2) $-a-b+c$; 3) $2a-b-3$; 4) $1-m-2n$.

2. Выполнить указанные действия: 1) $(-0{,}01)^5$; 2) $(-0{,}02)^4$; 3) $(-1)^{2n-1}$; 4) $(-1)^{2n+3}$; 5) $\left(-\frac{2}{3}\right)^5$; 6) $(-a^3)^4$; 7) $(-a^2)^3$; 8) $(a^2bc^3)^5$; 9) $\left(\frac{a^2}{b^3}\right)^n$; 10) $(-a^mb^{n-2})^p$; 11) $\left(\frac{a^m}{b^{n-2}}\right)^2$; 12) $\left(-\frac{x^3y^5}{z^4}\right)^7$; 13) $\left(-\frac{1}{2}a^3b^2\right)^{2m}$; 14) $\left(\frac{a^mb^{m-1}}{c^{m+1}}\right)^{2m}$; 15) $\left(-\frac{x^2y^3}{z}\right)^{2n+1}$; 16) $\frac{(a^2)^3(-b^2)^5}{-a^4(-b^3)^2}$; 17) $\frac{a^ma^{m-n}}{a^{n-2}}$; 18) $\left[\left(-\frac{a^3b^m}{c}\right)^2\right]^3$; 19) $\left[\left(\frac{x^my^{n-1}}{z^3}\right)^2\right]^p$; 20) $(-xy^2)^{3n}$.

3. Найти числовое значение: 1) $(-a^3)^3$ при $a=0{,}5$; 2) $(-a^2)^3$ при $a=\frac{1}{3}$; 3) $(m^3n^2)^2$ при $m=\frac{1}{2}$, $n=1\frac{1}{2}$; 4) $(-xy)^5$ при $x=4$, $y=0{,}1$.

§ 2. Квадратные корни[1]

4. Найти: 1) $\sqrt{3^2}$; 2) $\sqrt{(-3)^2}$; 3) $\sqrt{a^2}$; 4) $\sqrt{(m-n)^2}$. [1) 3; 2) 3; 3) $|a|$; 4) $|m-n|$].

5. Вычислить: 1) $\frac{\sqrt{7^2}}{7}$; 2) $\frac{\sqrt{(-7)^2}}{-7}$; 3) $7+\sqrt{7^2}$; 4) $+7+\sqrt{(-7)^2}$. [1) 1; 2) -1; 3) 14; 4) 14].

6. При каком условии справедливо равенство $\sqrt{a^2}=a$. [$a\geqslant 0$].

7. Чему равен $\sqrt{a^2}$, если $a<0$? [$|a|$ или $-a$].

8. Какие из следующих выражений не имеют смысла во множестве действительных чисел: $\sqrt{4}$? $\sqrt{-4}$? $\sqrt{6}$? $\sqrt{-6}$? $\sqrt{8}$? $\sqrt{-8}$? $\sqrt{a}$ $(a<0)$?

9. Что значит извлечь квадратный корень из числа a с точностью: 1) до 1? 2) до 0,1? 3) до 0,01? 4) до $\frac{1}{5}$? 5) до $\frac{1}{n}$?

---

[1] Здесь и в последующих параграфах рассматривается арифметическое значение корня.

10. Найти: 1) $\sqrt{3}$ с точностью до 0,1; 2) $\sqrt{5}$ с точностью до 0,1; 3) $\sqrt{7}$ с точностью до $\frac{1}{5}$; 4) $\sqrt{24}$ с точностью до $\frac{1}{3}$; 5) $\sqrt{2}$ с точностью до $\frac{1}{15}$. $\left[1)\ \sqrt{3}=\frac{\sqrt{300}}{10},\ 1{,}7<\sqrt{3}<1{,}8;\ 3)\ \sqrt{7}=\frac{\sqrt{7\cdot 5}}{5}=\frac{\sqrt{175}}{5},\ \frac{13}{5}<\sqrt{7}<\frac{14}{5}\right]$.

11. Представить числа 3 и 5 в виде квадратных корней.

12. Найти обратное и противоположное числа для каждого из данных чисел: $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $-\sqrt{3}$.

13. Называют ли такие числа, как $2\sqrt{3}$ и $\sqrt{8}$, четными? [Нет].

14. В чем ошибка: $\sqrt{36a^2+16b^2}=6a+4b$?

[Извлечение корня не обладает свойством распределительности по отношению к сумме].

15. Вычислить $\sqrt{a^2-b^2}$, если: 1) $a=50$, $b=48$; 2) $a=61$, $b=11$; 3) $a=45$, $b=27$. [1) 14; 2) 60; 3) 36].

16. Найти сторону квадрата, равновеликого прямоугольнику с данными сторонами (не вычисляя площади этого прямоугольника), если стороны прямоугольника равны: 1) 63 и 7; 2) 3 и 48; 3) 11 и 99; 4) 6 и 216.

[1) $\sqrt{63\cdot 7}=\sqrt{9\cdot 7\cdot 7}=3\cdot 7=21$].

17[1]. Как, воспользовавшись теоремой Пифагора, построить отрезки, длины которых были бы равны: $\sqrt{2}$? $\sqrt{3}$? $\sqrt{5}$?

18[1]. Как изобразить отрезками на одном чертеже числа: $\sqrt{6}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{12}$, воспользовавшись теоремой о перпендикуляре, проведенном из точки окружности к ее диаметру.

Указание. $6=1\cdot 6$, $10=2\cdot 5$, $12=3\cdot 4$, $1+6=2+5=3+4$. Диаметр полуокружности следует разделить на 7 равных частей.

19. Какие из данных чисел являются рациональными и какие иррациональными (положительными, отрицательными): 1) $\sqrt{9}$? 2) $\sqrt{1}$? 3) $\frac{4}{9}$? 4) 0? 5) $-\sqrt{25}$? 6) $\sqrt[3]{-4}$? 7) 2π? 8) $2+\sqrt{16}$? 9) $5-\sqrt{2}$? 10) $\sqrt{5}-4$? 11) $6-\sqrt{36}$?

---

[1] Упражнения 17 и 18 следует решать позже, когда будут рассмотрены соответствующие вопросы в курсе геометрии.

12) $\sqrt{3}-2\sqrt{3}$? 13) $4\sqrt{5}$? 14) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}$? 15) $\sqrt{3}:\sqrt{12}$? 16) $\sqrt[3]{-27}$?

20. Пользуясь квадратными корнями, привести примеры, показывающие, что: 1) сумма двух иррациональных чисел, 2) разность иррациональных чисел, 3) произведение двух иррациональных чисел, 4) частное от деления иррациональных чисел — могут быть рациональными числами и даже натуральными.

§ 3. Корни с целым положительным показателем

21. При каком условии имеет смысл во множестве действительных чисел $\sqrt[n]{a}$? [При n нечетном a может быть положительным числом, отрицательным и нулем, при n четном a не может быть отрицательным].

22. Для каких значений a во множестве действительных чисел справедливо тождество $(\sqrt[n]{a})^n = a$?

[При n — четном и $a<0$ левая часть тождества во множестве действительных чисел лишена смысла].

23. Для каких значений n справедливо тождество $\sqrt[n]{(a)^n} = a$? Привести примеры.

[При $a \geqslant 0$ n может быть четным и нечетным, при $a<0$ n может быть лишь нечетным].

24. Какие значения принимает выражение $\dfrac{\sqrt[n]{a^n}}{a}$, если: 1) $a>0$? 2) $a<0$? 3) $a=0$? Рассмотреть случаи: n — четное, n — нечетное. Привести примеры.

[При четном n: 1) 1; 2) — 1; 3) не имеет смысла].

25. Какие из перечисленных ниже корней не могут быть выражены действительными числами: 1) $\sqrt[3]{5}$? 2) $\sqrt[5]{-5}$? 3) $\sqrt[4]{16}$? 4) $\sqrt[4]{-16}$? 5) $\sqrt[6]{-64}$? 6) $\sqrt[3]{x}$ $(x<0)$? 7) $\sqrt[4]{x}$ $(x<0)$?

26. Найти ребро куба, равновеликого прямоугольному параллелепипеду с заданными ребрами (не вычисляя произведения длин ребер), если эти ребра равны: 1) 12, 6, 3; 2) 12, 15, 3.

27. Найти два соседних натуральных числа, между которыми заключается число: 1) $\sqrt[3]{10}$; 2) $\sqrt{5^3}$; 3) $\sqrt[4]{5^3}$; 4) $\sqrt{7^3}$. [1) 2, 3; 2) 11, 12; 3) 3, 4; 4) 18, 19].

§ 4. Тождественные преобразования иррациональных выражений

28[1]. Извлечь корень: 1) $\sqrt[5]{3^{20}}$; 2) $\sqrt[4]{16\cdot 625}$; 3) $\sqrt[5]{\frac{1}{32}\cdot 10^{10}}$; 4) $\sqrt[4]{810\,000}$; 5) $\sqrt[4]{\frac{m^4}{n^8}}$; 6) $\sqrt[5]{-32a^{10}b^{15}}$; 7) $\sqrt[n]{a^{3n}}$; 8) $\sqrt[n-1]{a^{3n-3}}$; 9) $\sqrt[3]{\frac{8a^9b^{12}}{27m^3}}$; 10) $\sqrt{(m^2-n)^4}$.

29. Вывести множитель за знак радикала: 1) $\sqrt{50}$; 2) $\sqrt{63}$; 3) $\sqrt[3]{720}$; 4) $\sqrt[3]{-686}$; 5) $\sqrt[4]{80}$; 6) $\sqrt[4]{375}$; 7) $\sqrt[5]{-96}$; 8) $\sqrt[5]{200\,000}$; 9) $\sqrt[3]{a^8b^6}$; 10) $\sqrt[4]{a^{12}b^3c^9}$; 11) $\sqrt[5]{\frac{m^{12}}{n^{13}}}$; 12) $\sqrt{(a^2-2ab+b^2)c}$; 13) $\sqrt[3]{(x+y)^4(x-y)}$; 14) $\sqrt[3]{\frac{(a+b)^6(a-b)^2}{a^6b^2}}$.

30. Подвести множители под знак радикала: 1) $2\sqrt{5}$; 2) $7\sqrt[3]{3}$; 3) $3\sqrt[5]{2}$; 4) $a\sqrt[3]{5}$; 5) $a^2b\sqrt{c}$; 6) $m\sqrt[3]{n}$; 7) $x^2\sqrt[5]{n^2}$; 8) $\frac{3}{4}\sqrt[3]{2mn}$; 9) $2mn^2\sqrt[5]{m^2n}$.

31. Сократить показатель корня и показатель степени подкоренного выражения: 1) $\sqrt[6]{a^4}$; 2) $\sqrt[5]{a^{15}b^{20}}$; 3) $\sqrt[n]{a^{2n}b^n}$; 4) $\sqrt[3n]{a^{2n}b^{6n}}$; 5) $\sqrt[4]{8a^{10}b^6}$; 6) $\sqrt[4]{16a^{8m}b^6}$; 7) $\sqrt[12]{64m^8n^{2n}}$.

32. Привести к одинаковым показателям корни: 1) $\sqrt[3]{a^2}$ и $\sqrt{a}$; 2) $\sqrt[3]{mn^2}$ и $\sqrt[4]{m^3n}$; 3) $\sqrt[6]{\frac{a^2}{b}}$ и $\sqrt[3]{\frac{a}{b^2}}$; 4) $\sqrt[12]{\frac{2a^2}{3b}}$ и $\sqrt{\frac{ab}{2}}$; 5) $\sqrt[m]{a^2b}$ и $\sqrt[n]{3a}$; 6) $\sqrt{\frac{a}{b}}$, $\sqrt[3]{\frac{a^2}{b^2}}$ и $\sqrt[4]{\frac{a^3}{b^3}}$; 7) $\sqrt[m]{4x^3y}$, $\sqrt[2m]{3x^2y^2}$ и $\sqrt[3m]{5xy^3}$.

33. Какое из иррациональных чисел больше: 1) $\sqrt[3]{2}$ или $\sqrt[5]{3}$? 2) $\sqrt[6]{5}$ или $\sqrt[4]{4}$?

34. Указать наибольшее из чисел: $\sqrt[3]{3}$; $\sqrt[4]{4}$; $\sqrt[12]{75}$.

35. Положительна или отрицательна разность: 1) $\sqrt[3]{3}-\sqrt{2}$? 2) $\sqrt[4]{3}-\sqrt[5]{4}$? 3) $\sqrt[5]{2}-\sqrt[6]{3}$? 4) $\sqrt{10}-\sqrt[3]{11}$?

---

[1] Здесь и в последующих упражнениях данного параграфа предполагается, что буквы обозначают положительные числа, а если они стоят в показателе степени, то — натуральные.

36. Сравнить с единицей отношения: 1) $\sqrt[4]{3} : \sqrt[3]{4}$; 2) $\sqrt{2} : \sqrt[3]{3}$.

37. Показать, что данные корни подобны: 1) $\sqrt{72}$ и $\sqrt{162}$; 2) $\sqrt[3]{40}$ и $5\sqrt[3]{135}$; 3) $4\sqrt[5]{6}$ и $-\sqrt[5]{\frac{2}{81}}$; 4) $-2\sqrt{\frac{2}{9}}$ и $5\sqrt{\frac{1}{2}}$; 5) $\sqrt[3]{81m^4}$ и $\sqrt[3]{24mn^6}$; 6) $2\sqrt[5]{\frac{x^6}{y}}$ и $-7\sqrt[5]{\frac{x}{y^{11}}}$; 7) $\sqrt{mn}$ и $\sqrt[4]{m^5n^9}$; 8) $\sqrt[3]{ab^2}$ и $\sqrt[6]{a^8b^{10}}$.

38. Упростить иррациональные выражения: 1) $\sqrt{\sqrt[3]{a}}$; 2) $\sqrt[3]{\sqrt{2}}$; 3) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^3}}$; 4) $\sqrt[3]{\sqrt[5]{5a^{10}}}$; 5) $\sqrt{a^2\sqrt[3]{a}}$; 6) $\sqrt[3]{a\sqrt[3]{a\sqrt{a}}}$.

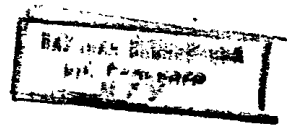
[3) $\sqrt[4]{a}$; 4) $\sqrt[15]{5a^{10}}$; 5) $a\sqrt[6]{a}$; 6) $\sqrt{a}$].

39. Преобразовать дробь так, чтобы знаменатель оказался рациональным: 1) $\frac{a}{\sqrt{b}}$; 2) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$; 3) $\frac{1}{\sqrt[3]{9}}$; 4) $\frac{8}{\sqrt[4]{8}}$; 5) $\frac{a}{\sqrt[4]{24}}$; 6) $\frac{a}{\sqrt[5]{a^2b^3c}}$; 7) $\frac{a}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$; 8) $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$; 9) $\frac{\sqrt{2}-3}{\sqrt{2}+3}$; 10) $\frac{5}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}$; 11) $\frac{1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}}$.

40. Освободить числитель дроби от иррациональности: 1) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$; 2) $\frac{\sqrt{m}-\sqrt{n}}{\sqrt{mn}}$; 3) $\frac{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}{a-b}$; 4) $\frac{x+y+2\sqrt{xy}}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}$; 5) $\frac{a+\sqrt{a^2-1}}{a-\sqrt{a^2-1}}$.

[1) $\frac{6}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$; 2) $\frac{m-n}{m\sqrt{n}+n\sqrt{m}}$; 3) $\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}$; 4) $\frac{(x-y)^2}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^4}$; 5) $\frac{1}{(a-\sqrt{a^2-1})^2}$].

41. Выполнить указанные действия: 1) $\sqrt{5}\cdot 4\sqrt{125}$; 2) $\frac{1}{3}\sqrt[3]{18}\cdot 2\sqrt[3]{3}$; 3) $a^2\sqrt[3]{3a}\cdot a\sqrt[3]{9a^2}$; 4) $\sqrt[3]{\frac{2}{5}}\cdot\sqrt{\frac{2}{5}}$;



5) $\sqrt[4]{a^2b}\cdot\sqrt[3]{ab^2}$; 6) $\sqrt[4]{8a^2}:\sqrt[4]{\frac{a^2}{3}}$; 7) $\sqrt[3]{a^2b}:\frac{1}{2}\sqrt{ab}$;

8) $\sqrt[5]{16}:\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$; 9) $\sqrt{\frac{3}{5}}\cdot 2\sqrt[3]{1\frac{2}{3}}$; 10) $\sqrt[8]{2a^5}:\sqrt[4]{2a^3}$;

11) $\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}}$; 12) $\left(\sqrt{ab}+\sqrt{\frac{a}{b}}\right):\sqrt{\frac{a}{b}}$;

13) $\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{3-\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{3-\sqrt{3}}}$;

14) $(\sqrt[4]{6}-3\sqrt[3]{6}+2\sqrt{6}):\sqrt{6}$.

42. Возвести в степень и упростить результат, где это окажется возможным: 1) $(\sqrt[3]{ab^2})^3$; 2) $(\sqrt[5]{m^2n^3})^2$; 3) $(-2a\sqrt[4]{b^3c})^5$; 4) $(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2$; 5) $(1+\sqrt{5})^3$;

6) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-2\sqrt{5}\right)^2$; 7) $(a\pm\sqrt[3]{b})^3$; 8) $(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})^2$;

9) $(\sqrt{4+\sqrt{5}}+\sqrt{4-\sqrt{5}})^2$;

10) $(\sqrt{a+\sqrt{b}}-\sqrt{a-\sqrt{b}})^2$.

43. Упростить: $\frac{1+a^2+a\sqrt{1+a^2}}{a+\sqrt{1+a^2}}$.

Указание. Вынести в числителе $\sqrt{1+a^2}$ за скобки.

44. Найти число, обратное данному: 1) $\sqrt{2}$; 2) $-\sqrt{3}$;

3) $\frac{3}{2-\sqrt{3}}$; 4) $5-\sqrt{3}$; 5) $\frac{4-\sqrt{3}}{2}$. $\left[1)\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right.$; 2) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$;

$\left.3)\ \frac{2-\sqrt{3}}{3}\right.$; 4) $\frac{5+\sqrt{3}}{22}$; $\left.5)\ \frac{2(4+\sqrt{3})}{13}\right]$.

45. Выделить из данных пар чисел пары взаимно обратных чисел: 1) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ и $\frac{3\sqrt{5}}{5}$; 2) $5-\sqrt{3}$ и $5+\sqrt{3}$;

3) $\sqrt{2}-1$ и $\sqrt{2}+1$; 4) $5+\sqrt{3}$ и $\frac{1}{22}(5-\sqrt{3})$; 5) $7-4\sqrt{3}$ и $7+4\sqrt{3}$. [1); 3); 4); 5)].

46. Извлечь квадратный корень из двучлена, воспользовавшись формулами сокращенного умножения:

1) $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$; 2) $\sqrt{7-4\sqrt{3}}$; 3) $\sqrt{10+2\sqrt{21}}$;

4) $\sqrt{7-2\sqrt{10}}$.

[1) $1+\sqrt{2}$; 2) $2-\sqrt{3}$; 3) $\sqrt{3}+\sqrt{7}$; 4) $\sqrt{5}-\sqrt{2}$].

47. Показать справедливость равенства:

$\sqrt{2x^2+2\sqrt{x^4-9}}=\sqrt{x^2+3}+\sqrt{x^2-3}$. Для каких значений x это равенство справедливо?

48. Найти сопряженные множители для данных иррациональных выражений: 1) $\sqrt{a}$; 2) $\sqrt[5]{a^3b^2}$; 3) $\sqrt{2}-\sqrt{3}$; 4) $\sqrt{a}-b$. (Если произведение данного иррационального выражения и некоторого множителя рационально, то этот множитель называется сопряженным для данного выражения.) $\left[1)\ \sqrt{a};\ 2)\ \sqrt[5]{a^2b^3};\ 3)\ \sqrt{2}+\sqrt{3};\ 4)\ \sqrt{a}+b\right]$.

49. Пользуясь иррациональными числами, представить в виде произведения следующие простые числа: 1) 5; 2) 11; 3) 17.

Указание. Воспользоваться тождеством:

$(a+\sqrt{b})(a-\sqrt{b})=a^2-b$. Например: $11=4^2-5=$

$=(4+\sqrt{5})(4-\sqrt{5})$, или $11=\sqrt{60\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{2}=$

$=\sqrt{40\frac{1}{3}}\cdot\sqrt{3}$.

50. В выражении $x\sqrt{a}\ (a>0)$ подвести под знак радикала множитель x, если: 1) $x>0$; 2) $x<0$.

$$\left[x\sqrt{a}=\begin{cases}\sqrt{x^2a}\ (x>0)\\ -\sqrt{x^2a}\ (x<0)\end{cases}\right].$$

51. В чем ошибка $-2\sqrt{3}=\sqrt{(-2)^2\cdot 3}=\sqrt{12}$?

ГЛАВА IV. КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ И УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ СТЕПЕНЕЙ, СВОДЯЩИЕСЯ К КВАДРАТНЫМ

Указания

1. В § 5 данной главы рассматриваются с учащимися VIII класса только действительные решения биквадратных уравнений. Упражнения с биквадратными уравнениями помещены также в главе XIII § 5 для учащихся X класса, изучающих решение уравнений высших степеней в расширенном поле — поле комплексных чисел.

2. В § 6 данной главы помещены некоторые упражнения на неравенства первой степени, дополняющие имеющиеся у учащихся

сведения о неравенствах из курса алгебры семилетней школы и необходимые для сознательного решения иррациональных уравнений, помещенных в § 7 этой же главы. В дальнейшем, в курсе X класса, решая соответствующие упражнения главы XIII, учащиеся систематизируют и пополняют свои знания о неравенствах, согласно программе средней школы.

§ 1. Квадратные уравнения

1. Проверить, являются ли данные числа корнями данного квадратного уравнения:

Уравнение	$x^2+4x-77=0$	$3x^2+7x-6=0$	$6x^2-7x+2=0$	$4x^2-5x=0$
Числа	7, -11	-3, $\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$	0, $\frac{5}{4}$

2. Решить данные квадратные уравнения, воспользовавшись разложением на множители левых частей их:

1) $x^2-6x+8=0$; 2) $x^2+2x-8=0$;

3) $x^2+4x-12=0$; 4) $x^2-5x+6=0$.

[1) $(x-3)^2-9+8=0$, $(x-3-1)\cdot(x-3+1)=0$,

$x_1=4$, $x_2=2$; 4) $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{25}{4}-6\right)=0$,

$\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2=0$, $x_1=3$, $x_2=2$].

3. Решить уравнения: 1) $x^2-6x+8=0$; 2) $x^2+8x+15=0$; 3) $x^2+2x-35=0$; 4) $x^2-2x-35=0$; 5) $16x^2=9x$; 6) $7x^2=0$; 7) $x^2+1=0$; 8) $3x^2+5=0$; 9) $8x^2+2x-3=0$; 10) $3x^2-7x+2=0$; 11) $x^2-2x-1=0$; 12) $x^2+2x-2=0$; 13) $x^2+\sqrt{2}x-4=0$; 14) $\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x^2+2\right)+2\right]+2\right\}=2$.

[5) 0, $\frac{9}{16}$; 6) 0,0; 7) и 8) — среди действительных чисел нет корней; 9) $\frac{1}{2}$, $-\frac{3}{4}$; 10) 2, $\frac{1}{3}$; 11) $1\pm\sqrt{2}$; 12) $-1\pm\sqrt{3}$; 13) $\sqrt{2}$, $-2\sqrt{2}$; 14) ± 2].

4. Найти корни следующих квадратных уравнений, не пользуясь формулой решения квадратных уравнений:

1) $x^2 - 10x + 25 = 0$; 2) $x^2 + 6x + 9 = 0$; 3) $4x^2 - 6x + 9 = 0$; 4) $9x^2 - 24x + 16 = 0$.

$\left[1)\ x_1 = x_2 = 5;\ 2)\ -3, -3;\ 3)\ \frac{3}{2}, \frac{3}{2};\ 4)\ \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right]$.

5. Составить квадратное уравнение так, чтобы один корень его был равен 0.

6. Какое квадратное уравнение имеет: 1) один корень, равный 0? 2) оба корня, равные 0? Ответ дать в общем виде.

7. Найти значение m, если данное уравнение имеет корнем число 0: 1) $3x^2 + 5x + m^2 - 4 = 0$; 2) $x^2 - x + m^2 - 2m + 1 = 0$; 3) $10x^2 + 4x + m^2 - 3m + 2 = 0$.

[1) ± 2; 2) 1; 3) 1; 2].

8. Решить уравнения: 1) $mx^2 + nx = 0$; 2) $a^2x^2 - 16b^2c^2 = 0$; 3) $\frac{x-c}{c} = \frac{c}{x-c}$; 4) $\frac{x^2}{m} = \frac{x}{n}$; 5) $mx^2 - n^3 = m^3 - nx^2$; 6) $x^2 - 6ax + 5a^2 = 0$; 7) $x^2 + 10nx + 16n^2 = 0$; 8) $x^2 - 2mx + m^2 - n^2 = 0$.

$\left[1)\ 0, \frac{n}{m};\ 2)\ \pm\frac{4bc}{a};\ 3)\ 0, 2c;\ 4)\ 0, \frac{m}{n};\right.$

$\left.5)\ \pm\sqrt{m^2 - mn + n^2};\ 6)\ 5a, a;\ 7)\ -2n, -8n;\ 8)\ m \pm n\right]$.

9. Как, исходя из формулы корней полного квадратного уравнения, вывести формулы для вычисления корней уравнений: 1) $ax^2 + bx = 0$? 2) $ax^2 + c = 0$? В каком случае уравнение $ax^2 + c = 0$ имеет действительные корни?

$\left[1)\ x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2}}{2a},\quad x_1 = 0,\quad x_2 = -\frac{b}{a};\right.$

$\left.2)\ x = \frac{\pm\sqrt{-4ac}}{2a} = \pm\frac{\sqrt{-ac}}{a} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}, \text{ при } a > 0,\ c < 0\right]$.

10. Найти сумму и произведение корней каждого из данных уравнений: 1) $x^2 + 4x - 6 = 0$; 2) $x^2 - 7x + 8 = 0$; 3) $2x^2 - 5x + 1 = 0$; 4) $5x^2 + x - 4 = 0$; 5) $mx^2 - nx - p = 0$.

$\left[3)\ \frac{5}{2}, \frac{1}{2};\ 4)\ -\frac{1}{5}, -\frac{4}{5};\ 5)\ \frac{n}{m}, -\frac{p}{m}\right]$.

11. Составить квадратное уравнение, если: 1) сумма его корней -5, а произведение 6; 2) сумма корней $\frac{1}{12}$, а произведение $-\frac{1}{12}$.

12. Составить квадратное уравнение по его корням: 1) (1; 3); 2) (— 0,2; — 0,3); 3) (0,3; — 0,1); 4) (— 1; + 1); 5) (4; 0); 6) (0; — 5); 7) (0,3; 0); 8) $\left(\frac{1}{2};\ -\frac{1}{2}\right)$; 9) $(\sqrt{2}; -\sqrt{3})$; 10) $(2+\sqrt{3};\ 2-\sqrt{3})$; 11) $(a; b)$; 12) $(a+b;\ a-b)$; 13) $\left(\frac{m}{n};\ \frac{n}{m}\right)$.

13. Составить квадратное уравнение, корни которого будут равны корням уравнения $x^2 + 6x + 8 = 0$: 1) умноженным на 2, 2) умноженным на 5.

[1) $x^2 + 12x + 32 = 0$; 2) $x^2 + 30x + 200 = 0$].

14. Дано уравнение $x^2 + px + q = 0$, корни которого x_1 и x_2. 1) Найти сумму и произведение корней нового квадратного уравнения, если известно, что корни его равны корням данного уравнения, умноженным на k; 2) составить это уравнение.

[1) Сумма $k(x_1 + x_2)$; произведение $k^2x_1 \cdot x_2$; 2) $x^2 + kpx + k^2q = 0$].

15. Составить квадратное уравнение, корни которого были бы: 1) на 2 больше корней уравнения $x^2 + 6x + 8 = 0$; 2) на 2 меньше корней этого уравнения.

[1) $x^2 + 2x = 0$; 2) $x^2 + 10x + 24 = 0$].

16. Составить такое квадратное уравнение, корнями которого были бы противоположные числа: 1) a, $-a$; 2) a^2, $-a^2$; 3) $\frac{1}{a}$, $-\frac{1}{a}$. Какой член отсутствует в получившихся уравнениях?

[1) $x^2 - a^2 = 0$; 2) $x^2 - a^4 = 0$; 3) $a^2x^2 - 1 = 0$].

17. Найти значение b в уравнении: 1) $x^2 + (b - 3)x - 11 = 0$; 2) $4x^2 + b^2x - 4x - 1 = 0$, если известно, что корни этого уравнения — противоположные числа.

[1) $b = 3$; 2) $b = \pm 2$].

18. Составить квадратное уравнение по его корням: 1) a и $a + 1$; 2) a и $\frac{1}{a}$.

[1) $x^2-(2a+1)x+a(a+1)=0$;
2) $ax^2-(a^2+1)x+a=0$].

§ 2. Составление квадратных уравнений по условиям задач

По условию каждой из следующих задач составить уравнение, решить его, дать ответ на вопрос задачи и проверить решение.

19. Найти число, если известно, что произведение его третьей части на число, в 5 раз большее его, равно: 1) 60; 2) 20. [1) ± 6; 2) $\pm 2\sqrt{3}$].

20. Произведение двух последовательных натуральных чисел равно 132. Найти эти числа. [11 и 12].

21. Одно натуральное число больше другого на 12, а произведение их равно 253. Найти эти числа. [11 и 23].

22. Одно число на 10 меньше другого, а произведение этих чисел равно большему числу, умноженному на 5. Найти эти числа. [15, 5 и 0, —10].

23. Квадрат какого числа: 1) больше его на 6? 2) меньше его на $\frac{1}{4}$? 3) меньше его на 1? [1) 3, —2; 2) $\frac{1}{2}$; 3) среди действительных чисел нет такого числа].

24. Площадь участка земли 240 *кв. м*. Длина его на 22 *м* больше ширины. Каковы размеры участка? [8 *м* и 30 *м*].

25. Составить задачу, решение которой приводило бы к уравнению: 1) $\frac{a}{x}+\frac{a}{x+c}=1$; 2) $x^2+(x+2)^2=(x+4)^2$; 3) $x(x-20)=96$.

§ 3. Исследование квадратных уравнений

26. Не решая уравнений, определить, какие из них имеют: а) действительные корни, б) равные действительные корни: 1) $13x^2+16x-70=0$; 2) $x^2+2x+11=0$; 3) $4x^2-12x+9=0$; 4) $5x^2-7x+2=0$.

27. Не решая уравнений, указать, какие из них имеют рациональные корни, какие иррациональные: 1) $x^2-6x-10=0$; 2) $x^2-6x-16=0$; 3) $7x^2+9x+2=0$; 4) $7x^2+10x+3=0$.

28. Указать условие, при выполнении которого уравнение: 1) $x^2+px+q=0$; 2) $ax^2+bx+c=0$, где p, q, a, b, c — рациональные числа, имеет иррациональные корни. Почему в случае иррациональных корней всегда

получаются сопряженные друг другу корни, т. е. такие корни, произведение которых рационально?

29. Найти значение q в уравнении $x^2 - 6x + q = 0$, если известно, что корни его равны между собой. [9].

30. Не решая уравнений, определить, какие из них имеют действительные корни: 1) различных знаков, 2) положительные, 3) отрицательные: 1) $x^2 - 14x + 17 = 0$; 2) $x^2 - 14x - 17 = 0$; 3) $x^2 + 14x - 17 = 0$; 4) $x^2 + 14x + 17 = 0$.

31. Не решая данных уравнений, указать, какие из них имеют действительные корни с противоположными знаками и какой из этих корней имеет бо́льшую абсолютную величину: 1) $7x^2 - 6x - 11 = 0$; 2) $4x^2 - 15x + 3 = 0$; 3) $x^2 + 8x - 6 = 0$. Обосновать ответ.

32. Почему корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, при $a > 0$ и $c < 0$, обязательно действительны?

33. Составить квадратное уравнение, заведомо имеющее действительные корни.

34. Не решая уравнения, установить, имеет ли оно отрицательный корень: 1) $5x^2 - 6x + 4 = 0$; 2) $3x^2 - 7x - 4 = 0$; 3) $x^2 + 7x - 2 = 0$.

35. Составить приведенное квадратное уравнение так, чтобы оно имело: 1) положительные корни; 2) корни с противоположными знаками, причем больший по абсолютной величине должен быть отрицательным.

36. При каком значении b данное уравнение имеет равные корни: 1) $4x^2 + bx + 1 = 0$; 2) $x^2 + bx + 36 = 0$; 3) $9x^2 + bx + 4 = 0$; 4) $ax^2 + bx + c = 0$.

[1) ± 4; 2) ± 12; 3) ± 12; 4) $\pm 2\sqrt{ac}$, где a и c одинаковых знаков].

37. Доказать, что если квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$, где p и q — целые числа, имеет рациональные корни, то эти корни — целые числа.

[Пусть корнем уравнения будет несократимая дробь $\frac{n}{m}$. Тогда $\frac{n^2}{m^2} + p\frac{n}{m} + q = 0$, или $\frac{n^2}{m} = -pn - qm$, но несократимая дробь $\frac{n^2}{m}$ не может быть равна целому числу $-pn - qm$].

38. Пусть квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, где $a > 0$, имеет корни различных знаков. При каком

условии бо́льшим по абсолютной величине будет: 1) положительный корень? 2) отрицательный?

[1) $c<0$, $b<0$; 2) $c<0$, $b\geq 0$].

39. Составить квадратные уравнения, корнями которых были бы числа, противоположные корням данных уравнений: 1) $x^2-5x+6=0$; 2) $x^2-6x+8=0$; 3) $x^2-x-6=0$; 4) $x^2+px+q=0$. Почему в этом случае меняется знак второго члена и не меняется знак третьего члена уравнения? [1) $x^2+5x+6=0$; 2) $x^2+6x+8=0$; 4) $x^2-px+q=0$].

40. Не вычисляя корней данных уравнений: 1) $x^2+6x-13=0$; 2) $x^2-5x-20=0$, составить уравнения, корни которых были бы противоположны корням данных уравнений. [2) $x^2+5x-20=0$].

41. Привести пример квадратного уравнения с рациональными коэффициентами и иррациональными корнями. Объяснить, почему можно наперед сказать, что корни взятых уравнений будут иррациональными и сопряженными друг другу.

42. Почему квадратное уравнение с рациональными коэффициентами не может иметь один корень рациональный, а другой иррациональный?

43. Почему приведенное квадратное уравнение с иррациональными коэффициентами не может иметь рациональных корней?

44. Дан один корень квадратного уравнения с рациональными коэффициентами: 1) $x_1=2+\sqrt{3}$; 2) $x_1=1-\sqrt{3}$; 3) $x_1=\sqrt{3}-4$. Найти второй корень и соответствующее уравнение.

[1) $x_2=2-\sqrt{3}$, $x_1+x_2=4$, $x_1\cdot x_2=1$, $x^2-4x+1=0$].

45. Известен один из корней уравнения (x_1). Найти второй его корень, не пользуясь формулой корней квадратного уравнения: 1) $x^2+x-12=0$, $x_1=-4$; 2) $6x^2-5x+1=0$, $x_1=\frac{1}{3}$; 3) $12x^2+5x-2=0$, $x_1=-\frac{2}{3}$; 4) $20x^2+31x+12=0$, $x_1=-\frac{4}{5}$; 5) $abx^2-(a^2+b^2)x+ab=0$, $x_1=\frac{a}{b}$.

$\left[2)\ \frac{1}{6}:\frac{1}{3}=\frac{1}{2};\ 5)\ 1:\frac{a}{b}=\frac{b}{a}\right]$.

46. Найти коэффициент q уравнения $x^2 - 3x + q = 0$, зная корень этого уравнения: 1) $x_1 = 2{,}5$; 2) $x_1 = 1{,}5$; 3) $x_1 = 4{,}5$. [1) $q = 1{,}25$].

47. В уравнении $x^2 - 9x + k = 0$ найти значение k, если известно, что: 1) один корень в 2 раза больше другого; 2) в 5 раз больше другого. $\left[1)\ 18;\ 2)\ 11\frac{1}{4}\right]$.

48. Найти значение k в уравнении $x^2 - 8x + k = 0$ так, чтобы корни его x_1 и x_2 были связаны соотношением $x_1 + 2x_2 = 11$. [15].

49. Найти q в уравнении $x^2 - 13x + q = 0$, зная, что: 1) $x_1 = 3x_2 + 1$; 2) $x_1 = 4x_2 - 2$.

[1) $4x_2 + 1 = 13$, $q = 30$; 2) $5x_2 - 2 = 13$, $q = 30$].

50. Составить квадратное уравнение, корнями которого были бы числа, обратные корням данного уравнения: 1) $x^2 - 5x + 6 = 0$; 2) $x^2 - 6x + 8 = 0$.

[1) $6x^2 - 5x + 1 = 0$; 2) $8x^2 - 6x + 1 = 0$].

51. Известны сумма и произведение корней приведенного квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$, $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 \cdot x_2 = q$. 1) Выразить сумму и произведение чисел, обратных x_1 и x_2, через p и q; 2) составить квадратное уравнение, корнями которого были бы числа $\frac{1}{x_1}$ и $\frac{1}{x_2}$; 3) выразить через p и q сумму квадратов корней x_1 и x_2.

$\left[1)\ \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -\frac{p}{q},\ \frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} = \frac{1}{q};\ 2)\ qx^2 + px + 1 = 0;\right.$

$\left.3)\ x_1^2 + x_2^2 = p^2 - 2q\right]$.

52. Составить уравнение, корни которого были бы обратны корням данного уравнения: 1) $x^2 + 20x + 99 = 0$; 2) $x^2 + 33x - 108 = 0$.

[1) $99x^2 + 20x + 1 = 0$; 2) $-108x^2 + 33x + 1 = 0$].

53. Составить уравнение, корни которого были бы равны сумме и произведению корней данного уравнения: 1) $x^2 - 4x - 5 = 0$; 2) $2x^2 - 5x + 4 = 0$.

[1) Один корень искомого уравнения 4, другой -5, $x^2 + x - 20 = 0$; 2) $2x^2 - 9x + 10 = 0$].

§ 4. Квадратный трехчлен

54. Что называется корнем квадратного трехчлена ax^2+bx+c? Как вычислить корни квадратного трехчлена?

55. Найти корни следующих двучленов и трехчленов: 1) $12x^2-6x$; 2) $4x^2-64$; 3) $x^2-8x+15$; 4) $x^2-(a+b)\,x+ab$; 5) $x^2+(a+b)\,x+ab$; 6) $x^2+(a-b)\,x-ab$.

$\left[1)\ 0, \frac{1}{2};\ 2)\ \pm 4;\ 3)\ 3, 5;\ 4)\ a, b;\ 5)-a;\ -b;\ 6)-a, +b\right]$.

56. Представить данный квадратный трехчлен в виде произведения, найдя предварительно корни этого трехчлена: 1) $x^2+16x+60$; 2) $x^2+20x-96$; 3) $x^2-4ax+3a^2$; 4) x^2-4x+3; 5) $2x^2-8x+6$; 6) $3x^2-12x+9$.

[4) $(x-3)\,(x-1)$; 5) $2(x-3)\,(x-1)$].

57. Даны два числа: 1) 2 и 3; 2) 2 и $\frac{1}{3}$. Составить несколько трехчленов, имеющих своими корнями эти числа.

[1) $(x-2)\,(x-3)=x^2-5x+6$; $2x^2-10x+12$; $5x^2-25x+30$; ...].

58. Упростить алгебраические дроби: 1) $\frac{a^2-3a+2}{a^2-5a+6}$; 2) $\frac{a^2-5a+6}{a^2-6a+9}$; 3) $\frac{a^{n+1}-3a^n+2a^{n-1}}{a^2-3a+2}$; 4) $\frac{m^3-m^2+m-1}{m^2-2m+1}$.

$\left[1)\frac{a-1}{a-3};\ 2)\frac{a-2}{a-3};\ 3)\ a^{n-1};\ 4)\frac{m^2+1}{m-1}\right]$.

59. Показать, что трехчлен x^2+px+q можно представить в виде $\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)$, а трехчлен ax^2+bx+c в виде $a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right]$. (Этот вид трехчлена называется каноническим.)

60. Представить каждый из данных трехчленов в каноническом виде, а затем разложить трехчлен на множители: 1) $x^2+4x-21$; 2) $x^2-4x-45$; 3) $x^2-3x-54$; 4) x^2+x-90.

$\left[1)\ (x+2)^2-25=(x+7)\,(x-3);\ 4)\ \left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{4}+90\right)=(x+10)\,(x-9)\right]$.

61. Найти корни трехчленов, данных в предыдущем упражнении.

[1) -7, 3; 3) -6, 9; 4) -10, 9].

62. Представить левую часть уравнения в каноническом виде и показать, что данное уравнение не имеет корней среди действительных чисел: 1) $x^2-6x+10=0$; 2) $x^2+8x+20=0$.

[1) $(x-3)^2+1$, сумма двух положительных чисел не может быть равна 0].

63. При каком условии трехчлен ax^2+bx+c будет полным квадратом?

$[b^2-4ac=0,\ b=\pm 2\sqrt{ac}]$.

64. Представить трехчлен ax^2+bx+c в виде квадрата двучлена, если известно, что корни этого трехчлена равны между собой.

$[b=\pm 2\sqrt{ac},\ ax^2\pm 2\sqrt{a}\sqrt{c}\,x+c=(\sqrt{a}\,x\pm\sqrt{c})^2]$.

65. Найти значение b в трехчлене: 1) $5x^2+bx+20$; 2) $3x^2+bx+16$, если известно, что данный трехчлен есть полный квадрат. Проверить ответ.

[1) $b=\pm 20$, $(\sqrt{5}x\pm 2\sqrt{5})^2$; 2) $b=\pm 8\sqrt{3}$, $(\sqrt{3}x\pm 4)^2$].

§ 5. Биквадратные уравнения

66. Решить данные уравнения, введя вспомогательное неизвестное $y=x^2$: 1) $x^4-5x^2+4=0$; 2) $x^4-13x^2+36=0$. Найти сумму и произведение полученных корней и сравнить их с коэффициентами данных уравнений. (Вспомогательное квадратное уравнение $ay^2+by+c=0$ иногда называется резольвентой уравнения $ax^4+bx^2+c=0$).

67. Резольвента данного биквадратного уравнения имеет корни 1) $9, \frac{1}{4}$; 2) $3, -2$. Найти действительные корни данного уравнения. $\left[1)\ \pm 3, \pm\frac{1}{2}\ ;\ 2)\ \pm\sqrt{3}\right]$.

68. Решить уравнения: 1) $x^4+4x^2-5=0$; 2) $x^4-x^2-6=0$. Сколько действительных корней имеет каждое из этих уравнений?

[1) ± 1, 2) $\pm\sqrt{3}$; второй корень резольвенты, как первого уравнения, так и второго, — отрицательное число].

69. Убедиться, что уравнение $x^4 + 4x^2 + 5 = 0$ не имеет действительных корней. Почему этот вывод можно сделать, не решая уравнения?

[Левая часть уравнения при любом действительном значении x — положительное число].

70. Решить уравнения: 1) $x^4 - 6x^2 + 9 = 0$; 2) $x^4 + 6x^2 + 9 = 0$. Почему первое уравнение имеет два двойных корня, а второе уравнение совсем не имеет действительных корней? [1) Резольвента имеет двойной положительный корень, равный 3. Корни уравнения: $x_{1,2} = \pm\sqrt{3}$, $x_{3,4} = \pm\sqrt{3}$].

71. Какой формулой пользуются для вычисления корней биквадратного уравнения: 1) $ax^4 + bx^2 + c = 0$; 2) $x^4 + px^2 + q = 0$.

72. Чему равна сумма корней любого биквадратного уравнения? Почему? [0].

73. Решить биквадратные уравнения: 1) $x^4 - (a + b)x^2 + ab = 0$; 2) $x^4 - (1 + ab)x^2 + ab = 0$. [1) $\pm\sqrt{a}$, $\pm\sqrt{b}$, при $a > 0$ и $b > 0$; 2) ± 1, $\pm\sqrt{ab}$, $ab > 0$].

74. Почему биквадратное уравнение, имеющее один корень, равный α, имеет второй корень, равный $-\alpha$?

75. Составить биквадратное уравнение, если известны его корни: 3, $\sqrt{2}$, -3 и $-\sqrt{2}$.

[$(x^2 - 9)(x^2 - 2) = 0$, $x^4 - 11x^2 + 18 = 0$].

76. Составить биквадратное уравнение, если известны два его корня: 1) 1 и -2; 2) $-\sqrt{3}$ и -2.

[1) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$; 2) $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$].

77. Разложить на множители следующие трехчлены: 1) $x^4 - 6x^2 + 8$; 2) $x^4 - 4x^2 + 3$.

[1) $(x - 2)(x + 2)(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$; 2) $(x - 1)(x + 1)(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$].

78. Решить уравнения: 1) $x^4 - 5x^2 = 0$; 2) $x^4 + 6x^2 = 0$.

[1) $x_1 = x_2 = 0$, $x_{3,4} = \pm\sqrt{5}$; 2) $x_1 = x_2 = 0$].

79. Решить уравнения: 1) $(x^2 - 10)^2 + 2(x^2 - 10) + 1 = 0$; 2) $(x^2 - 8)^2 + 4(x^2 - 8) - 5 = 0$.

[1) Два двойных корня ± 3; 2) ± 3, $\pm\sqrt{3}$].

80. Решить следующие неравенства и указать, будут ли найденные числа верхней или нижней границей множества решений. Какие точки числовой прямой изображают решения каждого из данных неравенств: 1) $2x-5>0$; 2) $3x+6<0$; 3) $4(x+5)>16$; 4) $5(x-2)<3x$.

[1) $x>\frac{5}{2}$; $\frac{5}{2}$ — нижняя граница; все точки, располагающиеся на числовой прямой справа от точки $\frac{5}{2}$; 2) $x<-2$; -2 — верхняя граница; все точки, лежащие на прямой слева от точки -2].

81. Решить следующие системы неравенств и установить, какие точки числовой прямой изображают решения этих систем:

1) $\begin{cases}2x-5>x-4,\\3x>12-x;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x+5>4,\\2x>-9;\end{cases}$

3) $\begin{cases}3x-2<4,\\2x+1<-3;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}5-x<7,\\3-x>-4.\end{cases}$

82. Решить данные неравенства и указать, где на числовой оси располагаются точки, изображающие решения: 1) $(x-3)(x+5)>0$; 2) $(x-2)(x+1)<0$; 3) $\frac{x-4}{x+5}<0$; 4) $\frac{x+2}{x-1}<0$; 5) $x^2-9>0$.

[1) $x>3$, $x<-5$; 2) $-1<x<2$; 3) $-5<x<4$; 4) $-2<x<1$; 5) $x>3$, $x<-3$].

83. Составить неравенство по условию задачи и решить его.

1) Найти двузначное число, в котором цифра единиц на 2 больше цифры десятков, если известно, что это число меньше 60 и больше 50.

$$\left[50<10x+x+2<60;\ 4\tfrac{4}{11}<x<5\tfrac{3}{11};\ 57\right].$$

2) Найти двузначное число, кратное 5, если известно, что при прибавлении к нему 10 получится число, меньшее 100, но большее 90.

[$90<5x+10<100$; $16<x<18$; $5\cdot 17=85$].

§ 7. Иррациональные уравнения

84. Можно ли назвать иррациональным такое уравнение: 1) $\sqrt{2}+x=5$? 2) $\sqrt{x}+2=5$? 3) $\sqrt{x^2}-5=0{,}5x$?

85. Дано иррациональное уравнение и корни, полученные при его решении. Какие из этих корней являются посторонними: 1) $x+\sqrt{x+1}=11$, $x_1=15$, $x_2=8$? 2) $\sqrt{3+x}=3-x$, $x_1=1$, $x_2=6$? [1) 15; 2) 6].

86. Решается некоторое иррациональное уравнение. Все преобразования и вычисления выполняются правильно. Обязательно ли проверять, удовлетворяют ли найденные значения неизвестных данному уравнению? Обосновать ответ.

87. Какие действительные числа могут быть корнями данного уравнения: 1) $\sqrt{2x-15}=7$? 2) $\sqrt{x}+\sqrt{x-7}=7$? 3) $\sqrt{5-x}+3\sqrt{x}=5$? 4) $\sqrt{2x+11}=5x+8$? 5) $x+\sqrt{x+1}=11$? 6) $\sqrt{5+x}-\sqrt{5-x}=0$?

[1) $x\geqslant 7\frac{1}{2}$; 2) $x\geqslant 7$; 3) $0\leqslant x\leqslant 5$; 4) $x\geqslant -1{,}6$; 5) $-1\leqslant x\leqslant 11$; 6) $-5\leqslant x\leqslant 5$].

88. Решить данные иррациональные уравнения, предварительно определив возможные значения x: 1) $\sqrt{x+7}=5$; 2) $1+\sqrt{x-2}=4$; 3) $\sqrt{x^2-9}=x-1$; 4) $\sqrt{4+\sqrt{x-39}}=3$.

[2) $x\geqslant 2$, $x=11$; 3) $x\geqslant 3$, $x=5$; 4) $x\geqslant 39$, $x=64$].

89. Найти корни уравнения: 1) $\sqrt{5x+6}+1=10$; 2) $\sqrt{2x-9}=\sqrt{6-x}$; 3) $\sqrt[3]{x+7}=2$; 4) $\sqrt{3+\sqrt{x}}=\sqrt{9-5\sqrt{x}}$; 5) $\sqrt{2x^2-1}=7$; 6) $\sqrt{25-x^2}=x-1$.

[1) 15; 2) 5; 3) 1; 4) 1; 5) 5, -5; 6) 4].

90. Почему данное уравнение не имеет корней: 1) $3-\sqrt{x+5}=6$? 2) $\sqrt{x}+\sqrt{x+2}=0$? 3) $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}+1=0$? 4) $\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}=0$?

[1) $\sqrt{x+5}$ — не может равняться -3; 2) и 3) — сумма двух неотрицательных чисел, из которых хотя бы одно больше 0, не может равняться 0; 4) $\sqrt{x+1}$ и $\sqrt{x-1}$

не могут оказаться равными, каково бы ни было значение x].

91*. Показать, что уравнения: 1) $\sqrt{x+1} = -2-x$; 2) $\sqrt{3-x}+\sqrt{x-5} = 10$ не имеют корней.

92. Следующие уравнения решить с помощью введения вспомогательного неизвестного: 1) $x-2\sqrt{x}=3$; 2) $x-4\sqrt{x}=5$; 3) $\sqrt{3x}-\sqrt{2x}=1$; 4) $x+\sqrt{x+1}=11$; 5) $\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}=2$; 6) $\sqrt{\frac{a-x}{b+x}}+\sqrt{\frac{b+x}{a-x}}=2$.

[1) $\sqrt{x}=y$, $x=9$; 2) $\sqrt{x}=y$, $x=25$; 3) $x=\left(\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\right)^2$; 4) $\sqrt{x+1}=y$, $x=8$; 5) $\sqrt{x}=y$, $x=1$; 6) $\sqrt{\frac{a-x}{b+x}}=y$, $x=\frac{a-b}{2}$, $a\neq -b$].

ГЛАВА V. ФУНКЦИИ И ИХ ГРАФИКИ

Указания

1. Упражнения § 2 этой главы (напечатаны петитом) посвящены выяснению понятия множества, одному из основных понятий математики. Учитель может использовать эти упражнения для занятий в математическом кружке как с учащимися VIII класса, так и с учащимися старших классов, незнакомых с понятием множества. Все упражнения § 2 просты и снабжены ответами.

2. В § 4 и 5 данной главы помещены упражнения по разделам программы VIII класса: «Линейные функции» и «Квадратичные функции». При повторении курса алгебры в IX и X классах целесообразно решать более сложные из них.

3. В § 6 этой главы рассматриваются «Алгебраические функции», отличные от линейных и квадратных, а в § 7 дано несколько упражнений на «Иные виды функций». Оба параграфа напечатаны петитом, так как выходят за рамки программы VIII класса и могут служить материалом как для внеклассных занятий, так и для повторения и углубления вопроса в последующих классах.

§ 1. Прямоугольные координаты на плоскости

1. В какой четверти лежит точка: 1) (2, —2)? 2) (—1,3)? 3) (4,2)? 4) (—3, —5)? 2. Где на координатной плоскости лежит точка: 1) (0, —1)? 2) (2,0)? 3) (0,4)? 4) (—3, 0)? 5) (0, 0)? 6) (2, 2)? 7) (2, —2)?

3. Что можно сказать о координатах точек: 1) лежащих на оси x? 2) лежащих на оси y? 3) лежащих в I и II координатных углах? 4) в III и IV? 5) в I и IV? 6) в II и III координатных углах? 7) на биссектрисе первого координатного угла? 8) на биссектрисе второго координатного угла?

[5) $(x > 0$; 7) x и y — равные положительные числа].

4. Где лежит точка, если: 1) абсцисса ее положительна, а ордината отрицательна? 2) и абсцисса, и ордината — отрицательны? 3) абсцисса и ордината равны по абсолютной величине, но противоположны по знаку? 4) абсцисса равна 0, а ордината отрицательна? 5) абсцисса отрицательна, а ордината равна 0?

5. Дана точка A (3, 4). Найти координаты: 1) точки B, симметричной A, относительно оси x; 2) точки C, симметричной A, относительно оси y; 3) точки D, симметричной A, относительно начала координат.

[B (3, —4); C (—3, 4); D (—3, —4)].

6. Где на координатной плоскости лежат точки, если: 1) абсцисса каждой из них равна 4, а ордината — какое угодно действительное число? 2) ордината каждой из них равна —3, а абсцисса — какое угодно действительное число?

[2) На прямой, параллельной оси x, проходящей через точку (0, —3)].

7. Где на координатной плоскости лежат точки, если известно, что: 1) расстояние каждой из них от начала координат больше 5, но меньше 7? 2) Координаты каждой из них равны по абсолютной величине?

[1) Между окружностями с центром в начале координат и радиусами 5 и 7; 2) на биссектрисах координатных углов].

8. Концами отрезка AB являются точки A (—3, 4) и B (5, 6). Найти координаты проекций концов этого отрезка на оси x и y.

9. Определить расстояние от начала координат до точки: 1) (4, 0); 2) (—5, 0); 3) (0, 4); 4) (0, —5).

10. Известны координаты трех вершин квадрата: $A(2, 5)$, $B(4, 5)$ и $C(2, 3)$. Найти координаты четвертой вершины D. [$D(4, 3)$].

11. Найти координаты середины отрезка AB, если концами этого отрезка являются точки $A(1, -1)$ и $B(5, -3)$. [3, —2].

12. Стороны прямоугольника $ABCD$ параллельны осям координат. Две протизоположные вершины этого прямоугольника таковы: $A(2, 1)$, $C(7, 4)$. Найти координаты остальных вершин и центра.

[$B(2, 4)$, $D(7, 1)$, центр (4,5; 2,5)].

13. Две вершины прямоугольника лежат на оси x, а координаты двух других таковы: (2,5) и (6,5). Определить площадь этого прямоугольника. [20 кв. единиц].

14. Концами отрезка AB являются точки $A(-4, 2)$ и $B(3, 4)$. Вычислить площадь трапеции, вершинами которой являются точки A, B и проекции их на ось x. [21 кв. единица].

15. Определить расстояние от начала координат до точки: 1) (3, 4); 2) (6, 8); 3) (2, —3); 4) (—12, 9); 5) (—3, —5). [1) 5; 2) 10; 3) $\sqrt{13}$; 4) 15; 5) $\sqrt{34}$].

16. Где располагаются точки, если известно, что для каждой из них сумма квадратов абсциссы и ординаты — постоянная величина, равная: 1) 9? 2) 6?

[На окружности, центр которой — начало координат, а радиус равен: 1) 3; 2) $\sqrt{6}$].

§ 2. Понятие множества

17. 1) Привести несколько примеров множеств. 2) Какими способами можно задавать множества? [Путем перечисления элементов множества или указанием характерных признаков элементов].

18. Назвать несколько элементов следующих множеств: 1) множества всех натуральных чисел; 2) множества отрицательных целых чисел; 3) множества обыкновенных правильных дробей; 4) множества простых чисел; 5) множества учащихся вашей школы; 6) множества корней биквадратного уравнения $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$; 7) множества действительных корней уравнения $4x^2 + 16 = 0$; 8) множества решений неравенства $2x - 8 < 0$. Какие из этих множеств являются конечными, какие бесконечными?

[7) Уравнение $4x^2 + 16 = 0$ действительных корней не имеет. Множество в этом случае называется пустым].

19. Сколько элементов содержит множество всевозможных прямых, лежащих в одной плоскости и проходящих: 1) через одну данную на плоскости точку? 2) через две точки? 3) через три точки плоскости, не лежащие на одной прямой?

[3) Через три точки плоскости, не лежащие на одной прямой, нельзя провести ни одной прямой. Множество пусто].

20. Какую фигуру образует: 1) множество всех точек плоскости, удаленных от данной точки плоскости A на расстояние a? 2) множество всех точек плоскости, удаленных от данной точки A менее чем на a? 3) удаленных от A более чем на a? 4) множество всех точек плоскости, равноудаленных от двух данных точек?

[1) Окружность с центром в точке A, радиуса a; 2) круг с центром в точке A, радиуса a, без точек ограничивающей его окружности; 3) плоскость, из которой удален круг с центром в точке A, радиуса a; 4) прямая, перпендикулярная отрезку, соединяющему данные точки, проходящая через середину его].

21. Назвать несколько частей множества всех учащихся вашей школы. [Множество учащихся комсомольцев, множество учащихся VIII класса и т. д.].

22. Найти общие элементы: 1) множества всевозможных равнобедренных треугольников и множества всевозможных прямоугольных треугольников; 2) множества всевозможных равносторонних треугольников и множества всевозможных прямоугольных треугольников; 3) равносторонних и равнобедренных треугольников.

[1) равнобедренные прямоугольные треугольники; 2) общих элементов нет, 3) равносторонние треугольники].

23. Найти общую часть: 1) множества четных целых чисел и множества целых чисел, кратных 3; 2) множества рациональных чисел и множества иррациональных; 3) множества простых чисел и множества натуральных чисел, кратных 5.

[1) множество целых чисел, кратных 6; 2) общей части нет; 3) множество, состоящее из одного числа 5].

24. Установлено соответствие между множеством x всех натуральных чисел и множеством y всех квадратов натуральных чисел таким образом, что каждому натуральному числу поставлен в соответствие квадрат его. Какое число множества y будет соответствовать числу 13 множества x? Какому числу множества x будет соответствовать число 256 множества y? Является ли это соответствие взаимно однозначным?

[169, 16, соответствие взаимно однозначно].

25. Является ли взаимно однозначным соответствие: 1) между классами вашей школы и классными помещениями в ней? 2) между местами в вашем классе и учащимися?

26. Каждому действительному числу поставлена в соответствие его абсолютная величина. Является ли это соответствие взаимно однозначным? [Не является].

27. Каждой точке окружности с центром в начале координат и радиусом, равным 5, приведена в соответствие точка оси x, являющаяся основанием перпендикуляра, опущенного из данной точки окружности на ось x. Является ли это соответствие взаимно одно-

значным? [Нет, так как каждой точке оси x, лежащей между точками -5 и 5, будут соответствовать две точки окружности].

28. Каждому натуральному числу приведено в соответствие число простых делителей его. Будет ли это соответствие взаимно однозначным? [Нет].

29. Каждому значению периметра P прямоугольника приводится в соответствие площадь S прямоугольника, имеющего этот периметр. Сколько значений S соответствует выбранному значению P и наоборот? [Бесконечно много].

30. Действительные числа изображаются точками числовой прямой; следовательно, устанавливается соответствие между действительными числами и точками прямой линии. 1) Является ли это соответствие взаимно однозначным? 2) Какую фигуру образуют точки, изображающие множество всех действительных чисел не меньше 2 и не больше 3? 3) Какую фигуру образуют точки, изображающие множество всех действительных чисел не меньше 5?

[1) Соответствие взаимно однозначно; 2) отрезок с концами в точках 2 и 3; 3) полупрямую, начинающуюся в точке 5 и уходящую неограниченно вправо (при обычном расположении числовой оси)].

§ 3. Понятие функции. Прямая и обратная пропорциональность

31. 1 морская миля равна 1,855 *км*, а географическая миля равна 7,42 *км*. Составить формулы для перевода длин, выраженных в морских и географических милях, в километры.

32. Составить формулу для перехода от выражения длин в дюймах к выражению тех же длин в сантиметрах, если 1 дюйм равен 2,54 *см*.

33. Выделить из перечисленных ниже величин прямо и обратно пропорциональные: 1) высота и основание прямоугольника, при постоянной площади; 2) дуга окружности и центральный угол, опирающийся на нее; 3) хорда и дуга, стягиваемая ею; 4) запас некоторого материала и время расходования его при постоянной норме; 5) время расходования материала и норма расходования при постоянном запасе; 6) площадь квадрата и сторона его.

34. Длина окружности выражается формулой $C = 2\pi R$, где π — постоянное иррациональное число, а R — радиус окружности. Пропорциональна ли длина окружности радиусу этой окружности? Чему равен коэффициент пропорциональности? Как выражается длина окружности через ее диаметр? Какое значение имеет в этом случае коэффициент пропорциональности?

35. В сосуд налита ртуть. Давление p ртути на дно сосуда зависит от глубины наполнения сосуда h. При глубине в 5 *см* это давление равно 68 *г* на 1 *кв. см*.

Выразить формулой зависимость p от h. Какой смысл имеет в данном случае коэффициент пропорциональности? [$p = 13{,}6h$, 13,6 — удельный вес ртути].

36. За 3 часа плот дров, плывущий по течению реки, проходит в среднем путь в 6,9 *км*. Выразить формулой зависимость пройденного плотом пути S от времени движения t. Какой смысл имеет в данном случае коэффициент пропорциональности?

37. Стальная пружина удлиняется прямо пропорционально грузу, подвешенному к ней, если этот груз не меньше 100 *г* и не больше 1 *кг*. При увеличении груза на 20 *г* в указанных границах пружина удлиняется на 0,6 *мм*. 1) Выразить формулой зависимость между грузом p (*г*) и удлинением пружины l (*см*). 2) Для каких значений p можно пользоваться полученной формулой?

38. Между величинами x и y имеется такая зависимость, что если значения одной возрастают, то соответствующие значения второй тоже возрастают. Можно ли эти величины назвать прямо пропорциональными?

39. Зависимость между объемом v (*куб. м*) и давлением p $\frac{кг}{м^2}$ 1 *кг* воздуха при 0° выражается формулой $pv = 7\,990$. Выразить p через v и v через p. Как называется зависимость между величинами p и v?

40. Площадь треугольника выражается формулой $S = \frac{1}{2}ah$, где a — основание, h — высота. Установить характер зависимости между величинами: 1) S и a; 2) S и h; 3) a и h, считая третью величину постоянной.

41. Зависимость между пройденным путем при равномерном движении и временем движения некоторого тела выражается следующим образом: $S = 2t + 40$. Являются ли величины t и S прямо пропорциональными?

42. Известно, что величина y прямо пропорциональна величине x. Что нужно знать, чтобы можно было по заданному значению x вычислить соответствующее значение y? [Коэффициент пропорциональности].

43. Известно, что две величины x и y прямо пропорциональны и при x, равном 4, y равен 9,2. Определить коэффициент пропорциональности. Выразить формулой зависимость y от x. [$y = 2{,}3x$].

44. Известно, что величина y обратно пропорциональна величине x. Что нужно знать, чтобы можно было

по заданному значению x вычислить соответствующее значение y? $\left[y=\frac{k}{x}\right.$ или $yx=k$, нужно знать $\left.k\right]$.

45. Величины x и y обратно пропорциональны. Известно, что, когда $x=0{,}5$, y равняется 2,4. Написать формулу, выражающую эту зависимость.

$$\left[y=\frac{0{,}5\cdot 2{,}4}{x},\ \text{или}\ yx=1{,}2\right].$$

46. Какая зависимость существует между переменными величинами u и v, если известно, что произведение (частное) соответствующих значений этих величин равно определенному числу c? $\left[uv=c,\ \frac{u}{v}=c\right]$.

47. Величина x обратно пропорциональна величине y, а y обратно пропорциональна z. В какой зависимости находятся величины x и z? [Прямо пропорциональны].

48. Величина x обратно пропорциональна y, y прямо пропорциональна z, z прямо пропорциональна u. В какой зависимости находятся величины x и u?

[Обратно пропорциональны].

49. Дана функция $y=3x+2$. В таблице[1] даны в каждом из шести случаев два значения аргумента: x_1 и x_2.

x_1	3	4	0	0,5	0,3	—3
x_2	4	5	2	0,6	0,8	—1
x_2-x_1						
y_2-y_1						

Вычислить для каждого из этих случаев приращение аргумента (x_2-x_1) и соответствующее приращение функции (y_2-y_1). Сравнить приращения аргумента и приращения функции. В какой зависимости они находятся?

[1] Таблицу заготовить заранее.

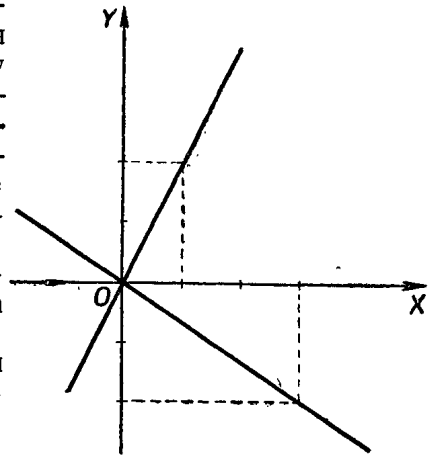
50. Дана функция $y = 2x + 3$. Вначале аргументу дали значение x_1, а затем x_2. Найти приращение функции. $[y_2 - y_1 = 2(x_2 - x_1)]$.

51. Доказать, что приращение функции $y = ax + b$, где a и b — определенные числа, прямо пропорционально приращению аргумента ее. $\left[\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = a\right]$.

52. Как проще всего построить график прямо пропорциональной зависимости $y = ax$?

[Нужно провести прямую через начало координат и точку $(1, a)$].

53. Выразить формулами прямо пропорциональные зависимости, заданные графически (черт. 1). Какая существует связь между направлением прямой линии, являющейся графиком прямо пропорциональной зависимости $y = ax$, и коэффициентом пропорциональности a?



Черт. 1.

§ 4. Линейная функция

54. Начальная длина пружины 3 *см*. В пределах нагрузки от 0,5 *кг* до 3,5 *кг* пружина удлиняется на 5 *мм* при увеличении груза на 1 *кг*. Выразить формулой функциональную зависимость между длиной пружины и грузом. Какова область определения этой функции?[1]

$[l = 0{,}5p + 3;\ 0{,}5 \leqslant p \leqslant 3{,}5]$.

55. Сколько требуется теплоты для нагревания стакана воды (250 *г*) от 15° до $t°$? $[Q = 250\,(t - 15)$ мал. кал.].

56. В полночь температура воздуха была 5°. До 2 час. дня температура равномерно повышалась на 0,2°

[1] При задании функции с помощью формулы (если не дано особых указаний) под областью определения (или областью существования) функции понимают множество всех тех значений аргумента, при которых эта формула имеет действительное значение.

за один час. Выразить формулой зависимость между температурой y и временем x. Для каких значений x можно по этой формуле вычислять температуру?

$[y = 0{,}2x + 5,\ 0 \leqslant x \leqslant 14]$.

57. Зависимость между длиной металлического стержня l и температурой его t выражается формулой $l = l_0(1 + \alpha t)$, где l_0 — длина этого стержня при 0°, а α — постоянное число. Какой физический смысл имеет число α? Как выражается t в зависимости от l?

58. Функция y от аргумента x неявно выражается равенством $4y - 3x = 5$. Найти явное выражение y в зависимости от x. Какая это функция?

$\left[y = \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}\text{, линейная}\right]$.

59. Известно, что при $x = 2$ линейная функция $y = 2x + b$ принимает значение 6,5. Определить b.

$[b = 2{,}5]$.

60. Известно, что график функции $y = ax - 4$ проходит через точку $A(-2;5)$. Определить a. $[a = -4{,}5]$.

61. Определить абсциссы точек пересечения с осью x графиков функций: 1) $y = x + 2$; 2) $y = 2x - 3$; 3) $y = -x + 5$.

$\left[1)\ -2;\ 2)\ \frac{3}{2};\ 3)\ 5\right]$.

62. Определить ординаты точек пересечения с осью y графиков функций: 1) $y = x + 2$; 2) $y = 2x - 4$; 3) $y = -5x + 5$.

[1) 2; 2) —4; 3) 5].

63. В какой точке пересекает график линейной функции $y = 0{,}4x + 2$: 1) ось x? 2) ось y? [1) $(-5{,}0)$; 2) $(0,2)$].

64. Найти какие-нибудь две точки, через которые пройдет график функции $y = 2x - 4$.

65. Через какую точку проходят графики всех данных функций: 1) $y = 7x$? 2) $y = -2x$? 3) $y = 72x$? 4) $y = -0{,}1x$?

66. Для каких значений x линейная функция $y = 2x - 0{,}4$ имеет: 1) нулевое значение? 2) отрицательные значения? 3) положительные значения?

[1) $x = 0{,}2$; 2) $x < 0{,}2$; 3) $x > 0{,}2$].

67. При каком значении x линейные функции $y = 0{,}6x + 5$ и $y = 2x - 2$ имеют одно и то же значение?

$[x = 5]$.

68. При каком условии графики линейных функций $y = a_1x + b_1$ и $y = a_2x + b_2$ являются параллельными прямыми? $[a_1 = a_2,\ b_1 \neq b_2]$.

69. При каком значении a график функции $y = ax + 3$ параллелен графику функции $y = 0{,}7x - 4$? $[a = 0{,}7]$.

70. При каком условии графики линейных функций $y = a_1x + b_1$ и $y = a_2x + b_2$ $(a_1 \neq a_2)$ пересекаются в одной точке, лежащей на оси y? $[b_1 = b_2]$.

71. Какая линия служит графиком функции: 1) $y = x$? 2) $y = -x$?

72. а) Какие функции из перечисленных ниже будут возрастать при увеличении аргумента и какие будут убывать: 1) $y = 4x - 10$? 2) $y = -\frac{1}{5}x + 4$? 3) $y = -x - 2$? 4) $y = x + 8$? б) Какая из этих функций возрастает медленнее, чем все остальные, и какая быстрее всех остальных? [а) Возрастают 1) и 4); убывают 2) и 3)].

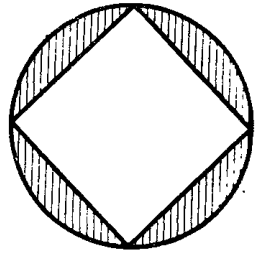
73. В какой точке пересекаются прямые линии, заданные следующими уравнениями 1) $2x - y = 2$, $2x + y = 10$? 2) $y = 1 - 2x$, $y = x - 5$? 3) $y = -3x + 5$, $y = -3x + 8$? 4) $x - y = 5$, $3x - 3y = 15$? 5) $x + y = 8$, $x - y = 4$? 6) $x + y = 10$, $y = 4x$? 7) $x + y = 7$, $2x + 2y = 10$?

[1) (3, 4); 2) (2, —3); 3) прямые параллельны; 4) совпадают; 5) (6, 2); 6) (2, 8); 7) параллельны].

§ 5. Квадратичная функция

74. Выразить формулой площадь заштрихованной части круга в зависимости от радиуса этого круга R (черт. 2). $[S = \pi R^2 - 2R^2]$.

75. Для картины, размеры которой 4 *дм* и 3 *дм*, делается прямоугольная рамка, имеющая со всех сторон одинаковую ширину x. Выразить формулой площадь рамки в зависимости от x.



Черт. 2.

$[2(4 + 2x)x + 2 \cdot 3 \cdot x$ или $(4 + 2x)(3 + 2x) - 12]$.

76. При свободном падении тела под действием силы земного притяжения путь и время находятся в такой зависимости: $S = 4{,}9t^2$ (путь выражается в метрах, а время в секундах). Какой путь пройдет тело за первые 2 сек.? [19,6 *м*].

77. $f(x) = x^2 + 2$. Найти: 1) $f(12)$; 2) $f(-12)$; 3) $f(x + 1)$; 4) $f(a) + 1$; 5) $f(3x)$; 6) $3f(x)$.

[1) 146; 2) 146; 3) x^2+2x+3; 4) a^2+3; 5) $9x^2+2$; 6) $3x^2+6$].

78. Найти корни функций: 1) $4x^2$; 2) $2x^2-50$; 3) $4x^2-5x$; 4) $(x+2)^2-9$; 5) $(x+1)^2-64$; 6) $x^2+7x+12$; 7) x^2+4x+6.

[1) 0; 2) 5, —5; 3) $0, \frac{5}{4}$; 4) 1, —5; 5) 7, —9; 6) —3, —4; 7) нет].

79. Показать, что приращение функции $y=x^2$ не пропорционально приращению аргумента.

80. Найти приращение функции $y=2x^2+6$ при переходе x от 2 к 4 и при переходе x от 2 к 6. Пропорциональны ли приращения этой функции приращениям аргумента ее? [1) 24; 2) 64].

81. Какой вид имеет график функции: 1) $y=ax^2$ при $a>0$ и при $a<0$? 2) $y=ax^2+bx+c$ при $a>0$ и при $a<0$? Как называются графики этих функций?

82. Сколько пар значений аргумента и соответствующих значений функции $y=x^2+px+q$ нужно знать, чтобы можно было определить коэффициенты p и q?

83. В каких точках парабола $y=x^2-5x+6$ пересекает ось x? [(2,0), (3,0)].

84. В какой точке парабола $y=ax^2+bx+c$ пересекает ось y? [$(0, c)$].

85. Как изменяется квадратичная функция ax^2+bx+c при возрастании аргумента, если: 1) $a>0$ и корни функции равны —2 и 4? 2) $a<0$ и корни функции равны 1 и 7?

86. Найти точки пересечения графика функции $y=x^2$ с графиком функции: 1) $y=2x$; 2) $y=2x-1$; 3) $y=2x-2$.

[1) (0, 0), (2, 4); 2) одна общая точка (1, 1) — точка касания; 3) графики не пересекаются].

§ 6. Алгебраические функции

87. Найти выражение радиуса круга r в зависимости: 1) от длины окружности; 2) от площади круга.

88. Выразить: 1) объем куба (v) как функцию площади его боковой грани (s); 2) площадь круга (s) как функцию длины окружности (l), ограничивающей этот круг; 3) поверхность куба (s) как функцию объема его (v).

$$\left[1)\ v=(\sqrt{s})^3;\ 2)\ s=\frac{l^2}{4\pi};\quad 3)\ s=6\left(\sqrt[3]{v}\right)^2\right].$$

89. Известно, что свободно падающее тело за t сек. с начала падения прошло путь s. Выразить формулой время падения в зависимости от пути. $\left[t=\sqrt{\frac{2s}{g}}\right]$.

90. В шахту бросается камень и устанавливается время, прошедшее с момента опускания камня до момента, когда звук от удара камня о дно шахты доходит до верха ее. Составить формулу, выражающую зависимость между глубиной шахты (H) и отмечаемым временем (t), принимая ускорение равным $9{,}81\ \frac{м}{сек^2}$, а скорость звука равной $340\ \frac{м}{сек}$.

$\left[t = \sqrt{\frac{2H}{9{,}81}} + \frac{H}{340}\right]$.

91. Вырезав по углам квадратного листа железа, со стороной 4 *дм*, равные квадраты, из оставшейся части сделали открытую сверху коробку. Выразить формулой вместимость получившейся коробки (v) и общую площадь (s) дна и стенок ее в зависимости от длины стороны вырезанных по углам квадратов (x). [$v = (4 - 2x)^2 x$; $s = 16 - 4x^2$].

92. Выразить формулой зависимость между освещенностью предмета, силой света и расстоянием от источника света до этого предмета, если освещенность изменяется прямо пропорционально силе света и обратно пропорционально квадрату расстояния.

93. Найти области определения функций, заданных с помощью следующих аналитических выражений для всех значений аргумента, для которых имеют смысл эти выражения: 1) $y = x^2 - 4$; 2) $y = \sqrt{4 - x^2}$; 3) $y = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}}$; 4) $y = \frac{x^2 - x}{x - 1}$; 5) $y = \frac{4}{x^2 - 4x}$.

Указание. См. сноску к упражнению № 54.

[1) Множество всех действительных чисел; 2) $|x| \leq 2$; 3) $|x| < 2$; 4) $x \neq 1$; 5) $x \neq 0$, $x \neq 4$].

94. При каких значениях x в множестве действительных чисел имеют смысл выражения: 1) $\frac{4x + 5}{-2x + 3}$; 2) $\frac{x}{x^2 - 4}$; 3) $\frac{1}{x - x^3}$; 4) $\frac{x}{1 + x^2}$; 5) $\frac{1}{x - x^2}$; 6) $\frac{4}{x^2 + 5x + 6}$; 7) $\sqrt{x}$; 8) $\frac{1}{\sqrt{x}}$; 9) $\sqrt{-x}$; 10) $\sqrt[3]{1 - x}$; 11) $\sqrt{x^2 - 1}$; 12) $\sqrt{1 - x^2}$; 13) $\sqrt{1 + x^2}$; 14) $\sqrt[3]{x}$; 15) $\sqrt[3]{-x}$; 16) $\sqrt{1 + x}$; 17) $\sqrt{x - 1} + \sqrt{x - 2}$; 18) $\sqrt{x} + \sqrt{-x}$.

95. В каких точках график функции $y = (x - 4)(x + 3)(x - 2)(2x + 8)$: 1) пересекает ось x и 2) в какой точке пересекает ось y?

[1) (4, 0), (−3, 0); (2, 0), (−4, 0); 2) при $x = 0$, $y = 192$].

96. Функция задана формулой $1 - \frac{1}{1 + x^2}$. Какие значения принимает эта функция? Определить корни ее. Как изменяются значения этой функции при неограниченном возрастании x и при неограниченном уменьшении x? Какие значения имеет эта функция при равных по абсолютной величине, но противоположных по знаку значениях аргумента?

97. Какие значения имеет функция: 1) $4x^3$; 2) $5x^4$ для равных по абсолютной величине, но противоположных по знаку значениях аргумента?

98. Какие из перечисленных ниже функций являются четными, какие нечетными: 1) $y = 2x$? 2) $y = 3x^2$? 3) $y = -4x^2 + 8$? 4) $y = 1 - x^2$? 5) $y = 3x^3 + 2x$? 6) $y = x^4 - 2x^2$? 7) $y = x^2 - 2x$?

99. Какими свойствами обладают графики четной и нечетной функций?

100. Какие функции получатся, если: 1) перемножить две четные функции? 2) перемножить две нечетные функции? 3) умножить четную на нечетную? 4) разделить четную на четную? 5) к нечетной прибавить нечетную? 6) к нечетной прибавить четную?

101. Построен график функции $ax^2 + bx + c$ $(a > 0)$. Оказалось, что он пересекает ось x в двух точках x_1 и x_2. Как по этому графику проще всего построить график функции $|ax^2 + bx + c|$?

102. Как изменяются значения функции $y = 1 - \sqrt{x}$ при возрастании аргумента?

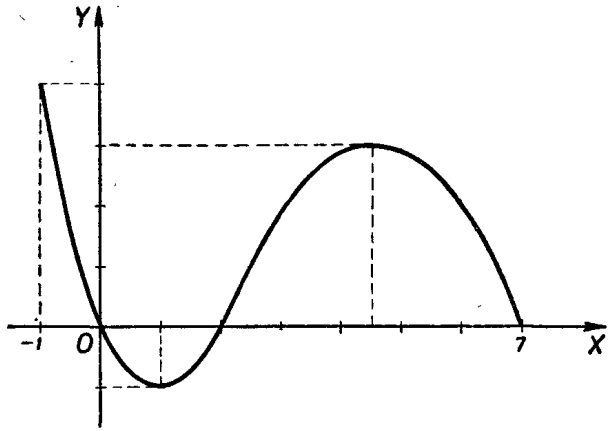
103*. 1) y — функция аргумента u, а u, в свою очередь,—функция аргумента x. Найти явное выражение функции y от x, если $y = 1 - u$, $u = \frac{x}{x-1}$; 2) зная, что $y = 3t$, а $x = 1 - \frac{1}{t}$, выразить явно y через x; 3) $z = \frac{x-y}{x+y}$, $u = \frac{x}{y}$. Выразить z явно через u.

$\left[1)\ y = \frac{-1}{x-1};\ 2)\ y = \frac{3}{1-x};\ 3)\ z = \frac{u-1}{u+1}\right]$.

§ 7. Иные виды функций*

104. Указать область значений функции: 1) $y = [x]$; 2) $y = x - [x]$, где $[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x, например: $[1{,}2] = 1$, $\left[\frac{1}{2}\right] = 0$. Какой вид имеет график функции $y = |x|$?

[1) Целые числа; 2) $0 \leqslant y < 1$].

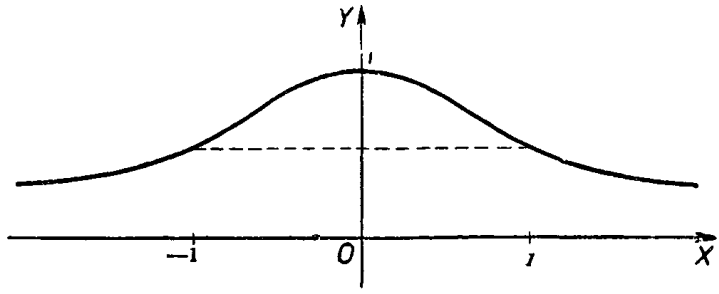


Черт. 3.

105. Функция задана графически на отрезке от -1 до 7 (черт. 3). 1) Каковы корни этой функции? 2) При каких значениях аргумента функция положительна, отрицательна? 3) Каковы область определения и область значений этой функции? 4) На каких участ-

ках оси x функция изменяется монотонно? 5) Каковы наибольшее и наименьшее значения функции?[1]

106. Функция задана графически. При x, стремящемся к $+\infty$ и $-\infty$, график функции неограниченно приближается к оси x (черт. 4). 1) Имеет ли функция корни? 2) Каковы области положи-



Черт. 4.

тельных и отрицательных значений функции? 3) Каковы область определения и область значений функции? 4) На каких участках оси x функция изменяется монотонно? 5) Как изменяется функция при возрастании аргумента? 6) Каковы наибольшее и наименьшее значения функции?[1]

ГЛАВА VI. СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ВТОРОЙ СТЕПЕНИ

1. Решить системы уравнений, воспользовавшись теоремой о сумме и произведении корней квадратного уравнения:

1) $\begin{cases} x+y=9, \\ xy=20; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x-y=3, \\ xy=40. \end{cases}$ Сколько решений имеет каждая из этих систем?

2. Решить данные системы уравнений:

1) $\begin{cases} x^2-y^2=8, \\ x:y=3:1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2+y^2=9, \\ x=2\sqrt{2y}; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} xy=3a^2, \\ 3x=4y; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x+y=a, \\ xy-x-y=b. \end{cases}$

[1) (3, 1), (−3, −1); 2) $(2\sqrt{2}, 1)$;

3) $\left(2a, \frac{3}{2}\right)$, $\left(-2a, -\frac{3}{2}a\right)$; 4) $xy=a+b$,

$x_{1,2}=\frac{a\pm\sqrt{a^2-4(a+b)}}{2}$, $y_{1,2}=\frac{a\mp\sqrt{a^2-4(a+b)}}{2}$].

[1] Чертежи приготовить заранее.

3. Дано: $\begin{cases} x^2+y^2=34, \\ x+y=8. \end{cases}$ Найти произведение xy и разность $x-y$, не вычисляя в отдельности x и y.

$[xy=15,\ x-y=\pm 2]$.

4. Дано: $\begin{cases} x+y=11, \\ xy=30. \end{cases}$ Найти: 1) сумму квадратов x^2+y^2; 2) разность $x-y$; 3) разность квадратов x^2-y^2, не вычисляя в отдельности x и y.

[1) $x^2+y^2=61$; 2) $x-y=\pm 1$; 3) $x^2-y^2=\pm 11$].

5. Дано: $\begin{cases} x^2+y^2=100, \\ xy=48. \end{cases}$ Найти $x+y$ и $x-y$, не вычисляя в отдельности x и y. $[\pm 14;\ \pm 2]$.

6. Сумма двух чисел 10, а утроенное произведение их 63. Найти эти числа.

7. Найти два числа, если известно, что их сумма, равная 10, равна также разности квадратов их.

$\left[x-y=1, x=5\frac{1}{2},\ y=4\frac{1}{2}\right]$.

8. Отношение двух взаимно обратных чисел равно $\frac{4}{9}$. Найти эти числа. $\left[\pm\frac{2}{3},\ \pm\frac{3}{2}\right]$.

9. Сумма площадей квадратов, построенных на катетах прямоугольного треугольника, равна 109 *кв. см*, причем одна площадь больше другой на 91 *кв. см*. Найти длины катетов. [10 *см*, 3 *см*].

10. Составить геометрическую задачу на прямоугольник или на прямоугольный треугольник, решение которой приводит к следующей системе уравнений:

1) $\begin{cases} xy=30, \\ x^2+y^2=61; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} xy=a, \\ 2(x+y)=b; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} \frac{x}{y}=m, \\ xy=n. \end{cases}$

11. Решить системы уравнений: 1) $\begin{cases} x+y+6xy=8, \\ 2xy=2; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x+y-xy=-1, \\ xy=6; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 3xy-2x-2y=2, \\ x+y=5; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x+y=2, \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=2; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} xy=6, \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{6}; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x^2-9y^2=-11, \\ x-3y=-1; \end{cases}$

7) $\begin{cases} x^2+y^2=2a^2+2b^2, \\ x^2-y^2=4ab. \end{cases}$

[1) (1, 1); 2) (2, 3) и (3, 2); 3) (4, 1) и (1, 4); 4) (1, 1); 5) (2, 3) и (3, 2); 6) (5, 2); 7) $\pm(a+b)$, $\pm(a-b)$, 4 решения].

12. Решить системы уравнений: 1) $\begin{cases} xy = 15, \\ x^2 + y^2 = 34; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 7, \\ x^2 - xy + y^2 = 3. \end{cases}$ Сколько решений имеет каждая из данных систем? В чем состоит особенность полученных решений?

[4 решения, 2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ xy = 2; \end{cases}$ $\begin{cases} x + y = \pm 3, \\ x - y = \pm 1; \end{cases}$

(2, 1), (−2, −1), (1, 2), (−1, −2)].

13. Дана система уравнений: $\begin{cases} 12x^2 + 13xy + 5y^2 = 58, \\ 7x^2 - 15xy + 14y^2 = 33; \end{cases}$

известно одно ее решение: $x = 1$, $y = 2$. Указать еще одно решение данной системы.

[(−1, −2) — решение системы, так как левые части уравнений содержат члены только второй степени].

14. Решить систему уравнений: $\begin{cases} 3x^2 + 7xy + 4y^2 = 0, \\ x + y = -5. \end{cases}$

Указание. Из первого однородного уравнения надо найти $\frac{x}{y}$. [−20, 15].

15. Решить следующие системы уравнений, вводя вспомогательные неизвестные:

1) $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 5, \\ \frac{1}{xy} = 6; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 5, \\ \sqrt{xy} = 6. \end{cases}$

$\left[1) \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right);\ 2)\ (9, 4), (4, 9)\right]$.

16. Известно, что в квадратном уравнении $x^2 + px + q = 0$, $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 x_2 = q$. Доказать, не вычисляя корней, что $x_1^2 + x_2^2 = p^2 - 2q$. Пользуясь доказанным равенством, найти сумму квадратов корней уравнений: 1) $x^2 - 9x + 20 = 0$; 2) $x^2 + 7x - 30 = 0$.

[1) 41; 2) 109].

17. Выразить квадрат разности корней квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$ через p и q.

$[(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = p^2 - 4q]$.

18. Найти значение q в данном уравнении, зная сумму квадратов его корней: 1) $x^2-11x+q=0$, $x_1^2+x_2^2=65$; 2) $x^2-6x+q=0$, $x_1^2+x_2^2=90$.

[1) 28; 2) -27].

19. Найти неизвестные коэффициенты уравнения по данной разности его корней: 1) $x^2-11x+q=0$, $x_1-x_2=1$; 2) $x^2+px+21=0$, $x_1-x_2=4$. Ответы проверить.

[1) $(x_1-x_2)^2=p^2-4q=1$, $q=30$; 2) $p^2-4q=16$, $p=\pm 10$].

20. Какая кривая линия выражается уравнением $x^2+y^2=25$?

[Окружность, центр которой совпадает с началом координат, а радиус равен 5].

21. Найти точки пересечения окружности $x^2+y^2=25$: 1) с осью x; 2) с осью y.

[1) $(-5,0)$, $(5,0)$ 2) $(0,-5)$, $(0,5)$].

22. Найти точки пересечения окружности $x^2+y^2=25$ с прямой линией: 1) $y=x$; 2) $y=\frac{3}{4}x$; 3) $y=x+1$; 4) $y=x+5$; 5) $y=x+8$.

$\left[1)\left(\frac{5}{2}\sqrt{2}, \frac{5}{2}\sqrt{2}\right), \left(-\frac{5}{2}\sqrt{2}, -\frac{5}{2}\sqrt{2}\right)\right.$; 2) $(4, 3)$, $(-4, -3)$; 3) $(-4, -3)$, $(3, 4)$; 4) $(0, 5)$, $(-5, 0)$; 5) окружность с прямой не пересекаются].

23. Найти точки пересечения: 1) окружности $x^2+y^2=1$ с прямой $x-y=0$; 2) окружности $x^2+y^2=12$ с параболой $y=x^2$.

$\left[1)\ \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right.$; 2) $(\sqrt{3}, 3)$, $\left.(-\sqrt{3}, 3)\right]$.

24. Как располагаются на плоскости относительно друг друга две окружности: 1) $x^2+y^2=25$? 2) $x^2+y^2=64$? [Концентрические окружности].

25. Сколько точек пересечения имеют: 1) окружность $x^2+y^2=a^2$ и парабола $y=x^2$? 2) окружность $x^2+y^2=a^2$ и парабола $y=x^2+2$? 3) окружность $x^2+y^2=a^2$ и гипербола $yx=1$?

[1) две; 2) при $a=2$ — касание, при $a<2$ линии не пересекаются, при $a>2$ — две точки пересечения; 3) при $a=1$ — касание в двух точках, при $a<1$ линии не пересекаются, при $a>1$ — четыре точки пересечения].

ГЛАВА VII. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ЧИСЕЛ

§ 1. Последовательность чисел

1. Подметить правило составления числовой последовательности и продолжить последовательность по этому правилу: 1) 27, 9, 3, 1, ...; 2) 1, 4, 9, 16, ...; 3) 103, 95, 87, 79, ...; 4) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$; 5) 0; 0,15; 0,1515; ...; 6) 5,5; 7; 8,5; 10; ... .

2. Подметить правило составления числовой последовательности по нескольким первым членам ее и выразить возможно более простой формулой общий член последовательности: 1) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$; 2) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$; 3) $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \ldots$; 4) $\frac{1}{1\cdot 2}, \frac{1}{2\cdot 3}, \frac{1}{3\cdot 4}, \frac{1}{4\cdot 5}, \ldots$; 5) 1, 3, 5, 7, ...; 6) 1, 4, 9, 16, ...; 7) 2, 4, 8, 16, ...; ...; 8) $-1, 1, -1, 1, \ldots$.

[1) $\frac{1}{n}$; 2) $\frac{n}{n+1}$; 3) $\frac{n+1}{n}$; 4) $\frac{1}{n(n+1)}$; 5) $2n-1$; 6) n^2; 7) 2^n; 8) $(-1)^n$].

3. Вычислить несколько первых членов числовой последовательности, общий член которой выражается формулой: 1) $\frac{n}{2n+1}$; 2) $3\cdot 2n^{-1}$; 3) $\frac{(-1)^n}{2n}$; 4) $\frac{(-1)^n}{n}$; 5) $\frac{3n}{n+1}$; 6) $\frac{2n+1}{n^2+1}$; 7) $\frac{2^n+1}{4n-1}$; 8) $\left(\frac{n}{n+1}\right)^{(-1)^n}$.

4. Известно выражение k-го члена последовательности. Вычислить a_3, a_5, a_6. 1) $a_k=2^k$; 2) $a_k=\frac{k-1}{k+1}$; 3) $a_k=\frac{1}{k!}$; 4) $a_k=4+5(k-1)$; 5) $a_k=5\cdot 2^{k-1}$; 6) $a_k=(-1)^{k+1}$; 7) $a_k=\frac{1+(-1)^k}{k}$; 8) $a_k=\left(1+\frac{1}{k}\right)^k$.

5. Найти 3-й, 6-й и 7-й члены последовательности, если: 1) $a_k=\begin{cases} 1\ (k \text{ — нечетное число}), \\ \frac{k+1}{k}\ (k \text{ — четное число}); \end{cases}$

2) $a_k = \begin{cases} \frac{1}{k} (k \text{ — нечетное число}), \\ \frac{1}{(k+1)^2} (k \text{ — четное число}). \end{cases}$

$\left[1)\ 1, \frac{7}{6},\ 1;\ 2)\ \frac{1}{3}, \frac{1}{49}, \frac{1}{7}\right]$.

6. Составить формулу, выражающую k-й член последовательности: 1) четных чисел; 2) чисел, кратных 3; 3) чисел, обратных натуральным; 4) 5, 10, 15, 20, . . . ; 5) 1,—1, 1,—1, . . . ; 6) $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \ldots$; 7) 1, 2, 6, 24, 120, . . . ; 8) 1, $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$.

$\left[1)\ 2k;\ 4)\ 5k;\ 5)\ (-1)^{k+1};\ 6)\ \frac{2k-1}{2k};\ 7)\ 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots k;\right.$
$\left.8)\ \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\right]$.

7. Найти несколько первых членов: 1) последовательности простых чисел; 2) последовательности десятичных приближенных значений $\sqrt{2}$ (с избытком). Известны ли формулы, выражающие общий член каждой из этих последовательностей?

8. Какие из последовательностей 1, 2, 3, 4 упражнений этого параграфа являются возрастающими? убывающими? ограниченными? неограниченными?

9. Можно ли назвать возрастающей последовательность: 1) 1,—2, 3,—4, . . . ? 2) 1, 1, 2, 2, 3, 3, . . . ? 3) — 1, — 2,—3,—4, . . . ? 4) 1, 1, 1, . . . ?

10. Какие из перечисленных ниже последовательностей, заданных формулой общего члена, являются ограниченными: 1) $1 + 3(n - 1)$? 2) $(-10)^n$? 3) $-\frac{n-1}{n}$? 4) $\frac{n+2}{n}$?

11. Какие из приведенных ниже последовательностей чисел являются арифметическими прогрессиями, геометрическими (возрастающими, убывающими): 1) 1, $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$? 2) 1, 3, 5, 7, 9, . . . ? 3) 1, 2, 4, 8, . . . ? 4) 1,—1, 2,—2, 3,—3, . . . ? 5) 20, 16, 12, 8, . . . ? 6) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$? 7) $1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}, \ldots$? 8) 360°, 180°, 90°, 45°, . . . ?

[7) геометрическая знакопеременная прогрессия].

12. Какую последовательность чисел образуют значения функции $-3x+8$, если x принимает последовательно значения 0, 1, 2, 3, ... ?

[8,5,2, ... — арифметическая прогрессия].

13. Дана последовательность квадратов натуральных чисел: 1, 4, 9, 16, ... 1) Составить последовательность разностей соседних членов. 2) Составить последовательность вторых разностей.

14. Найти сумму внутренних углов: 1) треугольника, 2) четырехугольника, 3) пятиугольника, 4) шестиугольника, 5) n-угольника. Какую числовую последовательность составляют эти суммы?

[180°, 360°, 540°, 720°, ... $180°(n-2)$ — возрастающую арифметическую прогрессию].

§ 2. Арифметическая прогрессия

15. Известно, что свободно падающее тело, если не учитывать сопротивления воздуха, за первую секунду падения проходит 4,9 *м*, а за каждую следующую на 9,8 *м* больше, чем в предыдущую. Заполнить таблицу.

Секунды	1	2	3	4	5	6
Пройденный путь в метрах						
Пройденный путь с начала падения в метрах						

16. На основании таблицы предшествующей задачи ответить на следующие вопросы: 1) какова глубина шахты, если камень, свободно падающий в шахту, достиг дна через 4 сек.? 2) определить время свободного падения камня, если глубина шахты равна 44 *м*.

[1) 78 *м*; 2) 3 сек.].

17. Пол первого этажа дома находится на высоте 1 *м* от земли. Лестница, ведущая с первого этажа на второй, имеет 18 ступенек, высота каждой из которых равна 20 *см*. Составить формулу, выражающую высоту любой ступени

от земли. Какова высота пола второго этажа над землей?

$[h = 1 + 0{,}2 \cdot k\,(м);\ 4{,}6\ м]$.

18. 1) Найти a_{10}, если $a_1 = 2, d = 5$. 2) Найти a_{11}, если $a_1 = 8$, $a_2 = 3$. 3) Найти a_9, если $a_1 = 18$, $a_3 = 12$.

[1) 47; 2) — 42; 3) — 6].

19. Определить разность арифметической прогрессии, если сумма первого и второго членов этой прогрессии равна 12, а произведение их 20. $[d_1 = 8,\ d_2 = -8]$.

20. Величина члена арифметической прогрессии, при заданных первом члене и разности, есть функция целочисленного переменного — номера этого члена. Как графически изображаются значения этой функции?

21. В задачах на арифметическую прогрессию встречаются обычно пять величин: a_1, a_n, d, n, s. 1) Сколько существует независимых уравнений, связывающих эти величины? 2) Каковы эти уравнения? 3) Сколько из этих пяти величин нужно знать, чтобы остальные можно было вычислить?

$\left[1)\ \text{Два};\ 2)\ a_n = a_1 + d\,(n-1),\ s = \frac{a_1 + a_n}{2} n;\ 3)\ 3\right]$.

22. Заполнить таблицу[1]:

a_1	d	a_n	n	s
2	[3]	20	7	[77]
8	— 7	[—55]	10	[—235]
[—5]	[2]	17	12	72
6	[—1]	[—11]	18	— 45

23. Найти сумму первых m натуральных чисел.

$\left[\frac{m\,(m+1)}{2}\right]$.

[1] Вывесить таблицу, опустив числа, стоящие в скобках.

24. Найти сумму первых n четных чисел.

$$\left[\frac{2+2n}{2}n=(n+1)\ n\right].$$

25. Найти сумму первых n нечетных чисел.

$$\left[\frac{1+(2n-1)}{2}n=n^2\right].$$

26. Вычислить сумму натуральных чисел от 1 до 1 000. $[(1\,000+1)\cdot 500=500\,500]$.

27. Вычислить сумму всех двузначных чисел. $[(10+99)\cdot 45=4\,905]$.

28. Сколько ударов делают часы с боем в течение суток, если они отбивают только целые часы?

$$\left[2\,\frac{1+12}{2}\cdot 12=156\right].$$

29. Найти сумму 10 членов последовательности a, $2a, 3a, \ldots$. $[55a]$.

30. Определить сумму всех чисел, кратных p, начиная с p и кончая mp. $\left[\frac{1}{2}p(m+1)m\right]$.

31. Найти разность между суммой всех натуральных чисел от 51 до 100 включительно и суммой всех натуральных чисел от 1 до 50. $[(51-1)+(52-2)+(53-3)+\ldots+(100-50)=50\cdot 50=2\,500]$.

32. Вычислить сумму: $10^2-9^2+8^2-7^2+6^2-5^2+\ldots-1^2$. $\left[19+15+11+\ldots+3=\frac{19+3}{2}\cdot 5=55\right]$.

33. Имеется несколько арифметических прогрессий с одинаковым числом членов. Будет ли арифметической прогрессией последовательность сумм соответственных членов данных прогрессий? Чему равна разность этой прогрессии? Привести пример.

[Разность равна сумме разностей данных прогрессий].

34. Известно, что каждый член арифметической прогрессии, за исключением первого и последнего, есть среднее арифметическое двух, рядом с ним стоящих членов. Какое определение можно дать арифметической прогрессии, пользуясь понятием среднего арифметического?

[Последовательность, в которой каждый член, за исключением первого и последнего, есть среднее арифметическое предшествующего и последующего членов].

35. Что значит: вставить между числами 16 и 100 шесть средних арифметических? Вычислить их.

$$\left[d = \frac{100-16}{7} = 12;\ 28,\ 40,\ 52,\ 64,\ 76,\ 88\right].$$

36. Между a и b вставить n чисел так, чтобы получилась арифметическая прогрессия.

$$\left[d = \frac{b-a}{n+1};\ a,\ a+\frac{b-a}{n+1},\ a+2\frac{b-a}{n+1},\ \ldots,\ b\right].$$

37. Числа, измеряющие три угла данного треугольника, составляют арифметическую прогрессию. Найти второй член этой прогрессии. [60°].

38. Доказать, что в четырехугольник, стороны которого образуют арифметическую прогрессию a, b, d, c, всегда можно вписать окружность. $[a + c = b + d]$.

39. Разность арифметической прогрессии с бесконечным числом членов положительна. Найдутся ли в этой прогрессии члены, превосходящие произвольное положительное, наперед заданное число? Дать графическое истолкование ответа.

40. Продолжить последовательность: 2, 4, 12, . . . , если известно, что разности между соседними членами возрастают последовательно на одно и то же число.

[Первая разность 2, вторая 8; следовательно, разности последовательно возрастают на 6. Получаем: 2, 4, 12, 26, 46, 72, 104, . . .].

§ 3. Геометрическая прогрессия

41. Дана геометрическая прогрессия: 2, 6, ... Какой член этой прогрессии равен 486? $[a_6]$.

42. Известно, что первый член геометрической прогрессии отрицателен, а знаменатель: 1) положителен; 2) отрицателен. Какой знак имеют остальные члены прогрессии?

[1) Все отрицательны; 2) знаки чередуются].

43. Какая разница в расположении положительных и отрицательных членов в арифметической и в геометрической прогрессиях?

44. Какая получится последовательность, если члены данной геометрической прогрессии со знаменателем q записать в обратном порядке?

45. Даны две геометрические прогрессии с одинаковым числом членов. Какую последовательность образуют

произведения соответственных членов данных прогрессий? Найти выражение любого члена этой последовательности, если первые члены данных прогрессий a_1, a'_1, знаменатели q_1, q_2.

[Геометрическая прогрессия. $u_k = a_1 a'_1 \ (q_1 \cdot q_2)^{k-1}$].

46. Доказать, что каждый член геометрической прогрессии с положительными членами, за исключением первого и последнего, есть среднее геометрическое предшествующего ему и следующего за ним членов. Привести пример. $\left[\sqrt{a_{k-1} a_{k+1}} = \sqrt{a_1 q^{k-2} a_1 q^k} = a_1 q^{k-1} = a_k\right]$.

47. Какая геометрическая прогрессия имеет сумму, равную: 1) $\frac{2-2\cdot 3^{10}}{1-3}$? 2) $\frac{1-q^n}{1-q}$?

48. В задачах на геометрическую прогрессию встречаются обычно пять величин: a_1, a_n, n, q, s. 1) Сколько существует независимых уравнений, связывающих эти величины? 2) Каковы эти уравнения? 3) Сколько из этих пяти величин нужно знать, чтобы остальные можно было вычислить? $\left[1)\right.$ Два; 2) $a_n = a_1 q^{n-1}$, $s = \frac{a_1 - a_n q}{1-q}$; $\left.3)\ 3\right]$.

49. Вполне ли определяется геометрическая прогрессия, если известны: 1) a_1, a_2, n; 2) a_1, a_2, a_4? Объяснить ответ. [1) Да; 2) нет].

50. В геометрической прогрессии всего n членов. 1) Какой номер имеет четвертый член от конца, если члены занумерованы от начала? 2) Каков номер k-го члена от конца? [1) $n-3$; 2) $n-(k-1)$].

51. Доказать, что в геометрической прогрессии произведение членов, равноудаленных от начала и от конца, равно произведению крайних членов.

$[a_k = a_1 q^{k-1}, \ a_{n-k+1} = a_1 q^{n-k}, \ a_k a_{n-k+1} = a_1 a_1 q^{n-1} = a_1 a_n]$.

52. Вывести формулу, выражающую произведение $a_1 a_2 a_3 \ldots a_n$, где a_1, a_2, a_3, $\ldots$ a_n — члены геометрической прогрессии.

$$\left[a_1 \ a_2 \ a_3 \ldots a_n = a_1^n q^{1+2+3+\cdots+(n-1)} = a_1^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}\right].$$

53. Вычислить сумму: $1+2+3+4+\ldots+18+19+20+19+18+\ldots+3+2+1$ и вывести формулу для вычисления таких сумм: $1+2+\ldots+n+\ldots+2+1$.

$[(1+19)+(2+18)+(3+17)+\ldots+(19+1)+20 = 20\cdot 20 = 400; \ n^2]$.

54. Вычислить сумму: 1) 50 членов последовательности 1,—3, 5,—7, 9,—11, . . . ; 2) 25 членов. Найти формулу, выражающую сумму; 3) $2n$ членов этой последовательности; 4) $2n + 1$ членов ее.

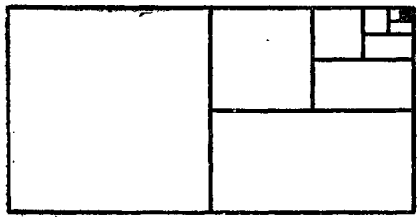
[Сумма двух членов равна — 2, трех 3, четырех — 4, пяти 5 и т. д. 1) — 50, 2) 25, 3) — $2n$, 4) $2n + 1$].

§ 4. Понятие предела

55. 1) Вершина треугольника перемещается по прямой, перпендикулярной основанию, неограниченно удаляясь от него. Как изменяются каждая из сторон треугольника? каждый из углов его? средняя линия? высота? периметр? площадь? сумма внутренних и сумма внешних углов? Какие из этих величин остаются постоянными? Какие неограниченно возрастают? К каким пределам стремятся углы треугольника?

2) Ответить на такие же вопросы, если вершина треугольника перемещается по прямой, параллельной основанию, неограниченно удаляясь от своего первоначального положения.

56. На одном чертеже (черт.5) последовательно строятся фигуры. Первая фигура — квадрат со стороной в 2 *см*. Вторая фигура получается присоединением к этому квадрату прямоугольника, площадь которого равна половине площади квадрата. Третья фигура получается из второй добавлением квадрата, площадь которого равна половине площади присоединенного до этого прямоугольника, и т. д. Вычислить несколько первых членов последовательности площадей получающихся фигур. Найти предел ее.



Черт. 5.

[4, 6, 7, $7\frac{1}{2}$, $7\frac{3}{4}$, ... Предел равен 8].

57*. Числовая последовательность u_1, u_2, u_3, . . . u_n, . . . имеет предел a. Дать геометрическое истолкование этому выражению.

[Каков бы ни был отрезок числовой прямой, с центром в точке a, все члены последовательности, начиная с некоторого (u_N), будут изображаться точками этого

отрезка; вне этого отрезка лежит лишь конечное число точек, изображающих члены данной последовательности].

58. Найти предел числовой последовательности: 1) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$; 2) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots$; 3) $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \ldots, \frac{n+1}{n}, \ldots$; 4) $2, 2, 2, \ldots$.

[1) 0; 2) 1; 3) 1; 4) 2].

59. Почему можно утверждать, что числовые последовательности: 1) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{11}, \ldots, \frac{1}{p}, \ldots$, где p — простое число; 2) $0, \frac{3}{4}, \frac{8}{9}, \frac{15}{16}, \frac{24}{25}, \ldots, \frac{n^2-1}{n^2}, \ldots$ имеют пределы? Найти эти пределы.

[1) Убывающая ограниченная последовательность; 2) возрастающая ограниченная последовательность].

60. Число сторон вписанного в данную окружность правильного многоугольника неограниченно удваивается.

1) Установить, как изменяются: а) длина стороны многоугольника (a_n); б) апофема его (α_n); в) периметр (P_n); г) площадь (S_n).

2) Доказать, что последовательности длин сторон и апофем, величин периметров и площадей этих многоугольников имеют пределы.

3) Найти формулы, выражающие в зависимости от числа сторон правильного многоугольника: а) число диагоналей его; б) величину внутреннего угла; в) величину внешнего угла; г) сумму внутренних углов; д) сумму внешних углов. Считая, что вначале в окружность был вписан треугольник, затем шестиугольник и т. д., вычислить по три члена последовательностей тех величин, для которых перед этим найдены были формулы. Какие из этих последовательностей имеют пределы и чему каждый из этих пределов равен?

У к а з а н и е. Надо пользоваться признаком существования предела числовой последовательности (возрастание или убывание и ограниченность).

4) Ответить на такие же вопросы, если правильные многоугольники будут описанными.

61. Привести пример последовательности, не имеющей предела.

62. Почему можно утверждать, что последовательности: 1) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{5}, \frac{5}{6}, \frac{1}{6}, \ldots$;

2) $-1, 1, -1, 1, \ldots$ не имеют пределов?

63. Привести примеры последовательностей рациональных чисел, имеющих своим пределом числа: 1) $\sqrt{2}$; 2) $\sqrt{3}$.

[1) Например: 1, 1,4, 1,41, 1,414, 1,4142, ... или 2, 1,5, 1,42, 1,415, 1,4143, ...].

64. Привести пример числовой последовательности, имеющей своим пределом число 2.

[Например: $1, 1\frac{1}{2}, 1\frac{3}{4}, 1\frac{7}{8}, \ldots$].

65. Найти предел последовательности, общий член которой: 1) $u_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$; 2) $x_n = 5 + \frac{10}{n}$; 3) $y_n = \frac{3+n}{n^2}$; 4) $v_n = \frac{1+(-1)^n}{n}$.

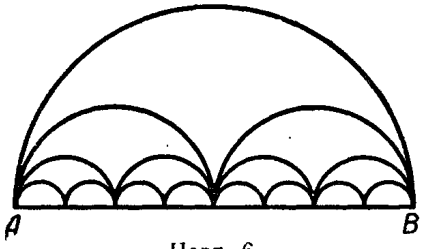
$\left[1)\ 0;\ 2)\ 5;\ 3)\ y_n = \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n},\ \lim y_n = 0;\ 4)\ 0\right]$.

66. Найти пределы функций натурального аргумента:

1) $\frac{(-1)^n}{n}$; 2) $\frac{2+(-1)^n}{n}$; 3) $\frac{2^n-1}{2^n}$; 4) $\frac{1}{n^2}$; 5) $\frac{n-1}{n+1}$; 6) $\frac{a+n}{b+n}$; 7) $\frac{2+n^2}{n}$; 8) $2 + \frac{3}{n} - \frac{4}{n^2}$; 9) $\frac{n^2-8}{n^3}$.

[1) 0; 2) 0; 3) 1; 4) 0; 5) 1; 6) 1; 7) предела нет; 8) 2; 9) 0].

67. На отрезке AB как на диаметре построили полуокружность (черт. 6). Затем отрезок AB разделили на две равные части и на каждом из получившихся отрезков построили полуокружность. Получилась кривая линия, состоящая из двух полуокружностей, соединяющая точки A и B. Далее построили кривую линию, состоящую из четырех полуокружностей, и т. д. Найти предел длин получившихся кривых линий.



Черт. 6.

[Предел равен длине полуокружности, построенной на отрезке AB].

68. 1) Имеет ли предел последовательность: $-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, -\frac{7}{8}, \frac{15}{16}, -\frac{31}{32}, \ldots$? 2) Имеет ли предел последовательность, члены которой равны абсолютным величинам членов данной последовательности?

69*. Если последовательность $u_1, u_2, u_3, \ldots u_n, \ldots$ имеет предел, то можно ли на этом основании утверждать, что последовательность $|u_1|, |u_2|, |u_3|, \ldots |u_n|, \ldots$ также имеет предел? Справедливо ли обратное утверждение? Привести примеры, иллюстрирующие ответы.

§ 5. Бесконечная убывающая геометрическая прогрессия

70. Что называется суммой членов бесконечной убывающей геометрической прогрессии? Почему необходимо особое определение этой суммы?

[Предел последовательности частичных сумм, т. е. сумм первых n членов, при неограниченном возрастании n. Особое определение необходимо потому, что сложение бесконечного числа слагаемых фактически не может быть выполнено].

71. Найти сумму членов бесконечно убывающих геометрических прогрессий: 1) $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \ldots$; 2) $2, \frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \ldots$; 3) $3, -1, \frac{1}{3}, \ldots$; 4) $1, -\frac{3}{4}, \frac{9}{16}, \ldots$; 5) $1, \frac{1}{1,1}, \frac{1}{(1,1)^2}, \ldots$; 6) $1, x, x^2, \ldots (|x|<1)$; 7) $\frac{a}{b}, \frac{a^2}{b^2}, \frac{a^3}{b^3}, \ldots$ $\left(\frac{a}{b}\right.$ — правильная дробь).

$\left[1) 1\frac{1}{2}; 2) 2\frac{2}{3}; 3) 2\frac{1}{4}; 4) \frac{4}{7}; 5) 11; 6) \frac{1}{1-x}; 7) \frac{a}{b-a}\right]$.

72. Дана последовательность: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots \frac{1}{2^{n-1}}, \ldots$,

1) Найти предел этой последовательности. 2) Вычислить несколько членов последовательности сумм одного, двух, трех и т. д. членов данной последовательности (частичных сумм). Найти предел составленной таким образом последовательности.

$\left[1) 0; 2) 1, 1\frac{1}{2}, 1\frac{3}{4}, 1\frac{7}{8}, \ldots.\right.$ Предел равен 2$\left.\right]$.

73. Найти предел последовательности: 0,3, 0,33, 0,333,....

[Предел данной последовательности равен пределу последовательности частичных сумм бесконечной убы-

вающей геометрической прогрессии: $\frac{3}{10}$, $\frac{3}{100}$, $\frac{3}{1\,000}$, $\frac{3}{10\,000}$, ..., который равен $\frac{1}{3}$].

74. Найти предел числовой последовательности: 0,9, 0,99, 0,999, ... [1].

75. В равносторонний треугольник, сторона которого равна 4 *см*, вписан другой треугольник, вершинами которого являются середины сторон данного треугольника. Стороны нового треугольника снова разделены пополам, вписан новый треугольник и т. д. Определить сумму периметров всех этих треугольников.

[$12 + 6 + 3 + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \ldots$. Сумма равна 24].

76. Выразить обыкновенными дробями следующие бесконечные десятичные периодические дроби: 1) 0,(6); 2) 0,(7); 3) 2,(13); 4) 0,(12); 5) 4,(71); 6) 0,(115) и проверить ответ. [2) $\frac{7}{10} + \frac{7}{100} + \ldots = \frac{7 \cdot 10}{10 \cdot 9} = \frac{7}{9}$].

77. Расстояние между автомобилем и пешеходом равно 100 *м*. Автомобиль и пешеход движутся в одном направлении так, что автомобиль догоняет пешехода. Скорость автомобиля в 10 раз больше скорости пешехода. Какой путь должен пройти автомобиль, чтобы догнать пешехода?

[Вначале автомобиль пройдет 100 *м*, а пешеход за это время пройдет 10 *м*. Пока автомобиль пройдет эти 10 *м*, пешеход пройдет 1 *м* и т. д. Получается сумма: $100 + 10 + 1 + \ldots$; $111\frac{1}{9}$ *м*].

78. В настоящий момент часовая и минутная стрелки часов совпадают. Через сколько минут они совпадут вновь? [$60 + 5 + \frac{5}{12} + \ldots$; $65\frac{5}{11}$ мин.].

79*. Выразить обыкновенной дробью бесконечную периодическую дробь: 1) 0,3888...; 2) 0,1222...; 3) 4,3(5); 4) 10,01.

[1) $\frac{3}{10} + \left(\frac{8}{100} + \frac{8}{1000} + \ldots\right) = \frac{3}{10} + \frac{8 \cdot 10}{100 \cdot 9} = \frac{35}{90}$; 3) $4 + \frac{3}{10} + \left(\frac{5}{100} + \frac{5}{1000} + \ldots\right) = 4\frac{32}{90} = 4\frac{16}{45}$].

80*. В какой системе счисления сумма членов убывающей геометрической прогрессии $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, ... может быть записана в следующем виде: 0,111....

[При основании 2].

ГЛАВА VIII. ОБОБЩЕНИЕ ПОНЯТИЯ СТЕПЕНИ

1. Для каких показателей n имеет смысл определение степени a^n как произведения n равных сомножителей?

2. Степень числа, отличного от 0, с нулевым показателем принимается равной 1. Почему в этом определении оговаривается, что основание степени должно быть отлично от 0?

3. 1) Почему целесообразно степень числа, отличного от 0, с отрицательным показателем определить как дробь, числитель которой 1, а знаменатель — степень того же числа, но с показателем, равным абсолютной величине данного отрицательного показателя? 2) Почему целесообразно степень числа с дробным показателем $\frac{m}{n}$ определить как корень n-й степени из m-й степени этого числа?

[При таких определениях сохраняются правила действий над степенями, установленные для целых положительных показателей].

4. Почему в элементарной математике рассматриваются степени с дробными показателями только при положительных основаниях? Ответ подтвердить примером.

[Степень с дробным показателем при отрицательном основании может оказаться лишенной смысла в области действительных чисел].

5. Представить в виде степени число, обратное данному числу a.

6. Освободиться от отрицательных показателей:

1) $4x^{-3}y^3$; 2) $\frac{1}{5c^{-3}}$; 3) $\frac{4a^{-2}}{5b^{-3}}$; 4) $\frac{3a^{-3}x^2}{5b^2y^{-4}}$; 5) $\frac{x^ay^{-b}}{z^{-a}}$.

7. Выполнить указанные действия и в получившихся результатах освободиться от отрицательных показателей: 1) $(2x^2):(3x^{-2})$; 2) $(ax^2):x^{-1}$; 3) $a^{-3}:a^{-2}$; 4) $(a^{-2}x^{-2})\cdot a^4$; 5) $(ax)^{-3}:(bx)^{-8}$.

8. Скорость света равна приближенно $2{,}99\cdot 10^{10}$ *см* в секунду. Выразить ее в километрах в секунду.

[$2{,}99\cdot 10^5$ *км* в сек.].

9. Расстояние от Земли до Солнца равно $1{,}4964\cdot 10^{13}$ *см*. Выразить это расстояние в километрах.

[$1{,}4964\cdot 10^8$ *км*].

10. Представить в краткой форме (с помощью степени 10) следующие числа: 1) 89 000; 2) 3 200 000; 3) 0,000015; 4) 0,000000025.

11. В 1 *г* воды приблизительно $3{,}35 \cdot 10^{22}$ молекул. Сколько знаков в обычной записи этого числа?

12. Между единицами энергии существует следующая связь: джоуль равен 10^7 *эрг*, а киловатт-час равен $3{,}6 \cdot 10^6$ *джоулей*. Выразить киловатт-час в эргах.

[$3{,}6 \cdot 10^{13}$ *эрг*].

13. Масса электрона $9{,}106 \cdot 10^{-28}$ грамма. Как записать это число в виде обыкновенной дроби?

14. Сколько знаков после запятой в числе $1{,}59 \cdot 10^{-19}$?

15. Масса атома водорода равна $1{,}67 \cdot 10^{-24}$ *г*. Сколько нулей в обычной записи этого числа (считая и нуль целых)?

16. Удельный вес воздуха равен 0,001293, а удельный вес кислорода равен $1424 \cdot 10^{-6}$. Что тяжелее, воздух или кислород?

17. Во сколько раз число $25 \cdot 10^{17}$ больше, чем число $5 \cdot 10^{14}$? [в 5000].

18. Заменить радикалы степенями с дробными показателями: 1) $\sqrt[4]{a^6}$; 2) $\sqrt[3]{a^{-4}}$; 3) $\sqrt[3]{a^{-2}}$; 4) $\sqrt[n]{a^{-1}}$; 5) $\sqrt[a]{a}$; 6) $\sqrt[n]{n^{-1}}$; 7) $\sqrt[5]{\sqrt{5}}$; 8) $\sqrt[5]{5} \cdot \sqrt{5}$; 9) $\frac{a}{\sqrt{a}}$; 10) $\frac{a}{\sqrt[3]{a}}$; 11) $\frac{a}{\sqrt[3]{a^2}}$; 12) $\frac{(\sqrt{a})^5}{\sqrt{a^3}}$; 13) $\sqrt{{}^3\sqrt{3\sqrt{3}}}$; 14) $\sqrt[3]{2\sqrt[3]{2}}$; 15) $\sqrt[3]{2+\sqrt[3]{2}}$.

19. Вычислить: 1) $16^{-\frac{1}{4}}$; 2) $9^{-\frac{1}{2}}$; 3) $4^{0,5}$; 4) $81^{0,75}$; 5) $81^{-0,75}$; 6) $100^{-1,5}$; 7) $16^{-\frac{3}{2}}$; 8) $\left(\frac{25}{49}\right)^{-0,5}$; 9) $\left(2\frac{10}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}$.

[1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{1}{3}$; 3) 2; 4) 27; 5) $\frac{1}{27}$; 6) 0,001; 7) $\frac{1}{64}$; 8) $1\frac{2}{5}$; 9) $\frac{9}{16}$].

20. Выполнить указанные действия, получившийся результат представить без отрицательных и дробных показателей: 1) $(2a^{-3}):\left(a^{-\frac{3}{2}}\right)$; 2) $\frac{a^{-\frac{1}{2}}}{3a^{-2}}$; 3) $\frac{x^{-1}}{x^{\frac{1}{3}}}$; 4) $\frac{\sqrt[3]{x^{-4}}}{\sqrt[3]{x}}$; 5) $(a^2-b^2)^{\frac{1}{2}}(a+b)^{\frac{3}{2}}(a-b)^{-\frac{1}{2}}$; 6) $\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)^2$.

21. Известно, что приближенно $10^{0,3010}\approx 2$ и $10^{0,6990}\approx 5$. Представить в виде степени 10 следующие числа: 1) 8; 2) 25; 3) 0,4.

22. Сравнить с 1 следующие числа: 1) $\left(\frac{7}{8}\right)^{\frac{2}{3}}$; 2) $\left(\frac{9}{7}\right)^{\frac{3}{5}}$; 3) $\left(\frac{7}{9}\right)^{-\frac{2}{3}}$; 4) $\left(\frac{9}{7}\right)^{-\frac{3}{5}}$.

[1) меньше 1; 2) больше 1; 3) больше 1; 4) меньше 1].

23. Сравнить по величине следующие числа: 1) $\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{5}{7}}$ и $\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{6}{7}}$; 2) $(1,4)^{\frac{4}{5}}$ и $(1,4)^{\frac{6}{5}}$.

ГЛАВА IX. ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ И ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИИ

Указания

Упражнения, помещенные в § 2 данной главы (напечатаны петитом), относятся к понятию «Обратная функция». Они могут быть использованы во внеклассной работе, так как этот вопрос, углубляя знания учащихся о функциях, выходит за рамки обязательной программы по алгебре для IX класса.

§ 1. Показательная функция

1. Как называется функция u^v, если: 1) u — аргумент, а v — постоянное число? 2) u — постоянное число ($u>0$), а v — аргумент? [1) Степенная; 2) показательная].

2. Какие значения принимает степень $(-a)^{\frac{m}{n}}$ при $a>0$, если: 1) m — четное число, n — нечетное? 2) m — нечетное, n — нечетное? 3) m — нечетное, n — четное? 4) m — четное, n — четное?

[1) $(-a)^{\frac{m}{n}} > 0$; 2) $(-a)^{\frac{m}{n}} < 0$; 3) $(-a)^{\frac{m}{n}}$ в области действительных чисел не имеет смысла; 4) следует дробь $\frac{m}{n}$ заменить равной ей несократимой $\frac{\mu_1}{\nu_1}$ тогда вопрос сведется к одному из первых трех случаев].

3. При каком основании a рассматривается в элементарной математике показательная функция $y = a^x$?

4. Для каких значений аргумента определена показательная функция $y = a^x$?

[Для всех действительных чисел].

5. Какие значения принимает функция $y = 3^x$, если: 1) x принимает последовательно значения $0, 1, 2, 3, 4, \ldots$; 2) $-1, -2, -3, -4, \ldots$; 3) значения $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \ldots$.

6. Какие значения принимает показательная функция a^x $(a > 0)$ для всех значений аргумента от $-\infty$ до $+\infty$?

[Область значений показательной функции — множество всех положительных действительных чисел].

7. Как изменяются значения функции a^x при возрастании x от $-\infty$ до ∞, если: 1) $a > 1$? 2) $0 < a < 1$?

8. Какие из перечисленных ниже показательных функций являются возрастающими и какие убывающими при возрастании аргумента: 1) $y = 4^x$? 2) $y = 0{,}25^x$? 3) $y = 10^x$? 4) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$? 5) $y = (\sqrt{2})^x$?

9. Сравнить a^x при различных значениях x с 1, если: 1) $a > 1$; 2) $0 < a < 1$.

$$\left[1)\ a^x \begin{cases} > 1 & (x > 0) \\ < 1 & (x < 0) \\ = 1 & (x = 0) \end{cases};\ 2)\ a^x \begin{cases} > 1 & (x < 0) \\ < 1 & (x > 0) \\ = 1 & (x = 0) \end{cases}\right].$$

10. Какой график имела бы показательная функция a^x, если бы $a = 1$? Как график показательной функции a^x располагается относительно этой прямой при: 1) $a < 1$? 2) $a > 1$?

11. Где показательная функция $y = a^x$, при $a > 1$,

возрастает быстрее, ближе к оси y или дальше от нее, справа или слева?

12. Какая показательная функция: $y = 2^x$ или $y = (\sqrt{2})^x$ возрастает быстрее при возрастании значений x? [$y = 2^x$].

13. Какая из двух показательных функций: $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ или $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ убывает быстрее при возрастании значений x? $\left[y = \left(\frac{1}{3}\right)^x\right]$.

14. Как располагаются графики показательных функций: 1) $y = 10^x$ и $y = 2^x$? 2) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ и $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ относительно друг друга? Рассмотреть случаи: $x > 0$, $x = 0$, $x < 0$.

[1) Для отрицательных значений x график функции $y = 2^x$ лежит выше графика функции $y = 10^x$, для положительных значений x — наоборот, в точке (0,1) графики этих функций пересекаются].

15. Каким образом по графику функции a^x можно построить график функции $-a^x$?

[Достаточно построить кривую, симметричную графику функции a^x, относительно оси x].

16. Каким образом по графику функции a^x можно построить график функции $\left(\frac{1}{a}\right)^x$?

[Достаточно построить кривую, симметричную графику функции a^x относительно оси y].

17. Сравнить графики функций: 1) $y = 2a^x$ и $y = a^x$; 2) $y = -2a^x$ и $y = a^x$.

18. Как изменяются значения функции $y = -3a^x$ при возрастании x от $-\infty$ до $+\infty$, если: 1) $0 < a < 1$? 2) $a > 1$?

19. При каких значениях аргумента x соответствующие значения функции 2^{2x} будут больше $\frac{1}{4}$? [$x > -1$].

20. Как решить графически уравнение: 1) $2^x = 4x$? 2) $2^x = x^4$?

21. Сколько действительных корней имеет уравнение 1) $2^x = x^2$? 2) $2^x = -3x^2$? [1) 3; 2) не имеет].

22. Какую числовую последовательность образуют значения показательной функции $\left(\frac{1}{3}\right)^x$, соответствующие значениям аргумента x: 1, 2, 3, 4, ...?

23. Дана геометрическая прогрессия: 1, 3, 9, 27, 81, ... Значениями какой показательной функции являются члены этой прогрессии и для каких значений аргумента?

[$y = 3^x$, 0, 1, 2, 3, 4, ...].

§ 2. Понятие обратной функции*

24. Какие понятия лежат в основе понятия функции?

[Понятия множества и соответствия].

25. О каком соответствии между двумя множествами говорится в определении функции?

[Это соответствие характеризуется тем, что каждому значению аргумента приведено в соответствие некоторое определенное значение функции].

26. Какое соответствие между элементами двух множеств называется взаимно однозначным? Привести примеры.

[Когда каждому элементу первого множества приведен в соответствие один определенный элемент второго, причем для каждого элемента второго множества найдется приведенный ему в соответствие один элемент первого множества].

27. Между множеством натуральных чисел и множеством четных натуральных чисел установлено соответствие таким образом, что натуральному числу n приведено в соответствие натуральное число $2n$. Охарактеризовать обратное соответствие.

[Каждому натуральному четному числу будет соответствовать натуральное число, в два раза меньшее].

28. Дана функция $y = x^2$. Охарактеризовать обратное соответствие, выражаемое этой функцией.

[Каждому значению $y (y > 0)$ соответствуют два значения x, равные $-\sqrt{y}$ и $\sqrt{y}$].

29. Дана функция $y = |x|$. Охарактеризовать обратное соответствие, выражаемое этой функцией.

30. Объем шара v в зависимости от радиуса этого шара R выражается формулой $v = \frac{4}{3}\pi R^3$. Найти формулу, выражающую радиус в зависимости от объема шара.

31. Тело, брошенное вертикально вверх со скоростью v (если не учитывать сопротивление воздуха), достигает высоты H, выражаемой формулой $H = \frac{v^2}{2g}$ ($g \approx 9{,}8$ *м/сек*^{2}). Какой формулой выражается скорость, с которой нужно бросить тело вверх, чтобы оно достигло высоты H? [$v = \sqrt{2gH}$].

32. Уравнение $4x - 5y = 3$ выражает функциональную зависимость между переменными x и y. Как выражается переменная y в зависимости от переменной x? Как выражается переменная x в зависимости от y?

33. При каких значениях аргумента x функция $y = \frac{1}{1+x^2}$ принимает значения: $\frac{1}{2}$? $\frac{1}{5}$? 0,1? $\frac{1}{37}$? $\frac{1}{65}$?

34. Найти обратные функции для следующих функций: 1) $y = 3x - 4$; 2) $y = 1 - x$; 3) $y = \frac{1}{x}$; 4) $y = \frac{5}{2x}$; 5) $y = \frac{x}{x-1}$; 6) $y = \sqrt[3]{x}$; 7) $y = \sqrt[3]{x+2}$.

[1) $x = \frac{1}{3}(y+4)$; 2) $x = 1 - y$; 3) $x = \frac{1}{y}$; 4) $x = \frac{5}{2y}$; 5) $x = \frac{y}{y-1}$; 6) $x = y^3$; 7) $x = y^3 - 2$].

35. Какая из перечисленных ниже функций имеет обратную функцию: 1) $y = \frac{5}{x-4}$? 2) $y = 6x - 5$? 3) $y = x^2$? 4) $y = x^3$?

5) $y = |x|$? 6) $y = \frac{|x|+x}{2}$? 7) $y = \frac{3}{2x}$? 8) $y = [x]$? 9) $y = x^4$?

10) $y = \begin{cases} 0 & (x \text{ — рациональное число}) \\ 1 & (x \text{ — иррациональное число})? \end{cases}$

11) $y = \begin{cases} -1 & (x < 0) \\ 0 & (x = 0) \\ 1 & (x > 0)? \end{cases}$ [1, 2, 4, 7].

36. Обязательно ли аргумент функции следует обозначать буквой x, а функцию буквой y? Различаются ли функции: x^3, u^3, t^3, если области определения их одинаковы?

37. Если данная функция является возрастающей (убывающей), то какой будет обратная ей функция? Привести примеры.

[Возрастающей (убывающей)].

38. В каких случаях степенная функция $y = x^n$ (n — натуральное число) имеет обратную? [Если n — нечетное число].

39. Доказать, что: 1) функция, обратная линейной $y = ax + b$, есть линейная; 2) функция, обратная дробнолинейной $y = \frac{ax+b}{cx+d}$, есть дробнолинейная. $\left[1)\ x = \frac{1}{a}y - \frac{b}{a};\ 2)\ x = \frac{-dy+b}{cy-a}\right]$.

40. Как по графику данной функции можно построить график функции, обратной данной, считая, как обычно, ось абсцисс осью значений аргумента, а ось ординат осью значений функции?

[Надо построить кривую, симметричную кривой, изображающей данную функцию, относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов (при условии одинакового масштаба по осям)].

41 *. Дана функция $y = 1 - x$. Обратной для нее является функция $x = 1 - y$, или в обычных обозначениях $y = 1 - x$. В этом случае данная функция и обратная ей оказались одинаковыми. Привести примеры других функций, обладающих тем же свойством.

$\left[\text{Например: } y = \frac{k}{x};\ y = \frac{x}{x-1}\right]$.

42. Каким свойством обладает график функции, если известно, что эта функция и обратная ей одинаковы?

[Биссектриса первого и третьего координатных углов является для графика данной функции осью симметрии].

43. Сгруппировать в пары взаимно обратных функций следующие функции: 1) x^3; 2) $\frac{4}{x}$; 3) $2x$; 4) $-4x$; 5) $\sqrt[3]{x}$; 6) $5-x$; 7) $\frac{4}{x}$; 8) $-\frac{1}{4}x$; 9) $\frac{1}{2}x$; 10) $5-x$. [1 и 5, 2 и 7, 3 и 9, 4 и 8, 6 и 10].

44. Дана функция $2x-5$. Обратная ей $\frac{x+5}{2}$. 1) Что получится, если аргумент данной функции заменить соответствующим значением обратной? 2) Что получится, если аргумент обратной функции заменить соответствующим значением данной функции? [x].

45. Привести примеры, подтверждающие, что: 1) если вместо аргумента x в формулу, выражающую данную функцию, подставить соответствующее значение обратной функции, или 2) если вместо аргумента x в формулу, выражающую обратную функцию, подставить соответствующее значение данной функции, то получится x.

§ 3. Логарифмическая функция

46. Имеет ли показательная функция $y=a^x$ ($a>0$, $a\neq 1$) обратную функцию? Обосновать ответ.

47. При каком основании a рассматривается в элементарной математике логарифмическая функция $y=\log_a x$? Почему в определении логарифмической функции как обратной показательной оговаривается, что основание a должно быть отлично от 1? [$a>0$, $a\neq 1$].

48. Установить область определения логарифмической функции и область ее значений.

[Область определения — множество всех положительных действительных чисел, область значений — множество всех действительных чисел].

49. Какой корень имеет всякая логарифмическая функция $y=\log_a x$? Какое значение принимает она при $x=a$?

50. Как изменяются значения логарифмической функции $y=\log_a x$ при возрастании аргумента x от 0 до ∞, если: 1) $0<a<1$? 2) $a>1$?

51. Какой вид имеет график логарифмической функции $y=\log_a x$, при: 1) $0<a<1$? 2) $a>1$?

52. Выделить из перечисленных ниже функций возрастающие, убывающие: 1) $y=\log_2 x$; 2) $y=\log_5 x$; 3) $y=\log_{0,1} x$; 4) $y=\log_{\frac{1}{2}} x$; 5) $y=\lg x$.

53. Для каких значений аргумента соответствующие значения функции $y=\log_a x$ положительны и для каких отрицательны? Рассмотреть случаи: 1) $0<a<1$; 2) $a>1$.

[2) $y<0$, если $0<x<1$; $y>0$, если $x>1$].

54. Каким образом по графику функции $y=a^x$ можно построить график функции $y=\log_a x$ (при одинаковом масштабе по осям)?

55. Через какую точку проходят графики всех логарифмических функций? [(1,0)].

56. Как располагаются относительно друг друга графики функций: 1) $y=\log_2 x$ и $y=\lg x$? 2) $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ и $y=\log_{0,1} x$?

[2) При $0<x<1$ график функции $\log_{\frac{1}{2}} x$ проходит выше графика функции $\log_{0,1} x$, при $x>1$ наоборот, при $x=1$ графики пересекаются].

57. В математике из всех показательных функций особенно важную роль играет функция $y=e^x$, где e — иррациональное число, приближенно равное 2,7183. Сравнить график этой функции с графиками функций $y=10^x$ и $y=2^x$.

58. Как обозначается функция, обратная показательной $y=e^x$? Сравнить график этой функции с графиками функций $y=\lg x$ и $y=\log_2 x$.

59. Как располагаются относительно друг друга графики функций: 1) $y=\log_2 x$ и $y=\log_{\frac{1}{2}} x$? 2) $y=\log_a x$ и $y=\log_{\frac{1}{a}} x$?

[Симметричны относительно оси x].

60. Доказать тождественность функций: $y=\log_{\frac{1}{a}} x$ и $y=-\log_a x$.

[Данные функции являются обратными для функций $x=\left(\frac{1}{a}\right)^y$ и $x=a^{-y}$, которые тождественны, а значит тождественны и данные функции].

61*. Как графически решить уравнение: 1) $2\log_4 x=-2x+3$? 2) $2x^2=\log_2 x$?

[2) Надо на одном чертеже построить графики функций $\log_2 x$ и $2x^2$, а затем найти абсциссы точек пересечения этих графиков].

62*. Найти обратную функцию для функции: 1) $y=2^{x+1}$; 2) $y=\lg x$; 3) $y=\log_3 2x$.

63. Радиоактивный распад вещества характеризуется формулой $N=N_0e^{-kt}$, где N_0 — число атомов вещества

в начальный момент, N — число оставшихся атомов этого вещества по истечении времени t, а k — постоянное число. Найти функцию обратную для функции N. $\left[t = -\frac{1}{k} \ln \frac{N}{N_0}\right]$.

64. Какую числовую последовательность составляют значения логарифмической функции $y = \log_2 x$ для значений аргумента: 1, 2, 4, 8, . . ., образующих геометрическую прогрессию? Привести другие примеры. Сделать вывод.

65. Для каких значений x в области действительных чисел имеют смысл следующие выражения: 1) $e^{\frac{1}{x}}$? 2) $\lg(-x)$? 3) $\lg\sqrt{x}$? 4) $\lg x^3$? 5) $\lg(x+1)$? 6) $\lg(1-x)$? 7) $\ln(x^2-1)$? 8) $\lg(x^2+1)$? 9) $\lg\lg x$? 10) $\lg\sin x$? 11) $\lg\cos x$? 12) $\lg\operatorname{tg} x$? 13) $a^{\frac{1}{2-x}}$? 14) $a^{\sqrt{x}}$? 15) $\frac{1}{\lg x}$? 16) $\sqrt{\ln x}$? 17) $\lg|x|$? 18) $5\lg x + 3\lg(x+3)$? 19) $3\lg(x+1) - 4\lg(x-1)$? 20) $2\lg\sqrt{x-1} + \sqrt{4-x}$?

66*. Определить наибольшее или наименьшее значение функции: 1) $y = 3^{x^2}$; 2) $y = \log_2(4+x^2)$; 3) $y = (\ln x)^2$; 4) $y = |\lg x|$.

[1) 1; 2) 2; 3) 0; 4) 0 — все наименьшие значения].

ГЛАВА X. ЛОГАРИФМЫ

Указания

Упражнения § 5 напечатаны петитом, так как вопрос о «Различных системах логарифмов» не включен в программу алгебры IX класса. Тем не менее эти упражнения привлекают внимание учащихся, а вопрос о переходе от одной системы логарифмов к другой помещен в программе, по которой окончившие среднюю школу готовятся к поступлению в вузы.

§ 1. Понятие логарифма

1. Какому показательному равенству равносильно логарифмическое равенство $\log_a N = x$? Представить в ином виде следующие равенства: 1) $\log_3 243 = 5$; 2) $\log_3 \frac{1}{243} = -5$; 3) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{64} = 6$; 4) $\log_{\frac{1}{2}} 64 = -6$.

2. Заполнить таблицы[1]:

1)

$\log_a N$	2	5	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$
a	5	2	8	27	64	5
N						

2)

$\log_a N$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{2}$	-2	-10
N	5	3	27	$\frac{1}{81}$	1 024
a					

3. Найти логарифмы: 1) чисел 729 и $\frac{1}{729}$ при основании 3, 9, 27, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{27}$; 2) чисел 1, 2, 4, $\frac{1}{4}$, 32, $\frac{1}{32}$ при основании $\frac{1}{2}$; 3) чисел $\frac{2}{5}$, $6\frac{1}{4}$, 1, $\frac{4}{25}$, $\frac{8}{125}$ при основании $2\frac{1}{2}$.

4. Заполнить таблицу[1]:

N	1 024	512	256	128	64	32	16	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{256}$	$\frac{1}{512}$	$\frac{1}{1\,024}$
$\log_2 N$													

Воспользовавшись этой таблицей, выполнить следующие действия: 1) $1\,024 : 128$; 2) $512 \cdot 256 : 1\,024$; 3) $\frac{1}{64} \cdot 128 \cdot 512 : \frac{1}{1\,024}$; 4) $32^3 : 512$; 5) $32^4 \cdot 128 : 256^3$.

5. Найти: 1) $\log_{\frac{1}{7}} \sqrt[3]{49}$; 2) $\log_{49} \sqrt[3]{\frac{1}{7}}$; 3) $\log_{\frac{1}{16}} \sqrt[5]{64}$.

6. Найти логарифмы чисел: 0,1; 0,01; 100; 1 000 при основании 0,1.

7. Найти числа, логарифмы которых при основании 3 равны: 0; 1; 2; 3; 4; 5; -1; -2; -3; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{2}{3}$.

8. Найти: 1) $\log_a a^2 \sqrt[3]{a}$; 2) $\log_a \frac{a \sqrt[3]{a} \cdot a^5 \sqrt{a}}{\sqrt[3]{a^2}}$;

3) $\log_a \sqrt{a \sqrt{a \sqrt{a}}}$; 4) $\log_a a^{m^n}$.

[1) $2\frac{1}{3}$; 2) $6\frac{1}{6}$; 3) $\frac{7}{8}$; 4) m^n].

[1] Таблицы заготовляются заранее.

9. 1) При каком основании (x) число (N) равно своему логарифму? 2) Найти число (N), логарифм которого, при основании a, равен a. [1) $x = N^{\frac{1}{N}}$; 2) $N = a^a$].

§ 2. Логарифмирование и потенцирование

10. Привести числовой пример для иллюстрации того, что: 1) логарифм суммы не равен сумме логарифмов, 2) логарифм разности не равен разности логарифмов. [Например: $\lg(100 \pm 10) \neq \lg 100 \pm \lg 10$].

11. Дано: $\lg 2 = a$, $\lg 3 = b$. Найти: $\lg 18$; $\lg 12$; $\lg 36$; $\lg 24$; $\lg 5$; $\lg 2\frac{1}{2}$; $\lg 1\frac{2}{3}$; $\lg 30$; $\lg 1{,}5$; $\lg 0{,}6$; $\lg^2 6$; $\lg^3 6$.

12. Для каких значений N справедливы равенства: 1) $\lg N^2 = 2\lg N$? 2) $\lg N^4 = 2\lg N^2$? [1) $N > 0$; 2) $N \neq 0$].

13. Чему равны выражения: 1) $\log_a 2N_1 - \log_a 2N_2$ и 2) $\log_a N_1^2 - \log_a N_2^2$, если $\log_a N_1 - \log_a N_2 = m$? [1) m; 2) $2m$].

14. Воспользовавшись определением логарифма, показать справедливость тождества $a^{\log_a N} = N$.

15. Вычислить: 1) $10^{\lg 3}$; 2) $7^{\log_7 5}$; 3) $10^{2\lg 3}$; 4) $2^{\frac{1}{2}\log_2 3}$; 5) $5^{-\frac{1}{2}\log_5 9}$; 6) $10^{\lg a + \lg b}$; 7) $10^{\lg a - \lg b}$; 8) $3^{1+\log_3 5}$; 9) $10^{1-\lg 1\frac{2}{3}}$; 10) $a^{\log_a(\log_b a)}$.

[5) $\frac{1}{3}$; 6) ab; 7) $\frac{a}{b}$; 8) $3 \cdot 5 = 15$; 9) 6; 10) $\log_b a$].

16. Представить: 1) 3 в виде степени числа 2; 2) 10 в виде степени числа 3; 3) a в виде степени числа b. [1) $2^{\log_2 3}$; 3) $b^{\log_b a}$].

17*. Показательные функции: 1) $y = 2^x$ и 2) $y = 10^x$ представить в виде показательных функций с основанием e. [1) $y = e^{x \ln 2}$].

18. Вычислить: 1) $\log_{\sqrt[6]{17}} \sqrt{17}$; 2) $100^{0{,}5 + \lg\sqrt{3}}$; 3) $5^{1-\log_{25}5}$; 4) $\log_4 8 - \log_8 4$; 5) $\frac{\lg 243}{\lg 9}$; 6) $\lg \operatorname{tg} 35° \cdot \lg \operatorname{tg} 40° \cdot \lg \operatorname{tg} 45° \cdot \lg \operatorname{tg} 50°$.

[1) 3; 2) 30; 3) $\sqrt{5}$; 4) $\frac{5}{6}$; 5) $2\frac{1}{2}$; 6) 0, так как $\lg \operatorname{tg} 45° = 0$].

19. Упростить: 1) $\frac{\lg(\lg N)^2}{\lg\lg N}$; 2) $\frac{\lg\lg N^{10}}{1+\lg\lg N}$; 3) $a^{3'\log_a y}$.

[1) 2; 2) 1; 3) y].

20. Прологарифмировать: 1) $x=\frac{a^2b^3}{c\sqrt{d}}$; 2) $x=5a^4\sqrt[5]{\frac{c^2}{d}}$;

3) $x=\sqrt[-5]{\frac{a^3b}{\sqrt{c}}}$; 4) $y=(a-b)\sqrt[5]{2a+b}$; 5) $y=\frac{p^2(m-n^2)^3}{\sqrt{q}}$;

6) $x=\lg a^2$; 7) $x=\lg^2 a$; 8) $y=\lg(\sqrt{ab})^3$.

$\left[6)\ \lg x=\lg 2+\lg\lg a;\ 8)\ \lg y=\lg\frac{3}{2}+\lg(\lg a+\lg b)\right]$.

21. Потенцировать: 1) $\lg x=5\lg a+\frac{1}{4}\lg b-\frac{3}{5}\lg c$;

2) $\ln y=\frac{2}{5}\left[\ln(m+n)+\frac{1}{3}\ln m\right]$;

3) $\lg x=\frac{\lg a}{4}+1-\frac{\lg(a-b)}{3}$; 4) $\lg x-2\lg y=\lg S$;

5) $3\lg z+\frac{1}{5}\lg t=1$; 6) $\frac{2}{3}\lg x-\lg\sqrt{z}=0$;

7) $\log_b a-\log_b c=5$? 8) $\log_x m-n=1$.

22. Вычислить x, если: 1) $\lg x=2\lg 5+3\lg 3$;

2) $\lg x=\lg 9-\lg 5+\lg 2$; 3) $\lg x=\frac{2}{5}\lg 32-\frac{1}{3}\lg 64$;

4) $\lg x=9\lg 2-3\lg 4$; 5) $\lg x=3\lg 5-2\lg 25+4$.

$\left[1)\ 675;\ 2)\ 3\frac{3}{5};\ 3)\ 1;\ 4)\ 8;\ 5)\ 2000\right]$.

§ 3. Логарифмы чисел при различных основаниях

23. Между какими соседними целыми числами заключаются логарифмы чисел: 1) 3, 5, 9, 20, 100, 400 при основании 2? 2) 7, 38, 144, 356, 1 427 при основании 10? 3) 0,03, 0,028, 0,009, 0,0052 при основании 10?

24. Какие из перечисленных ниже чисел являются положительными и какие отрицательными: $\lg 4{,}5$? $\lg 0{,}45$? $\log_2 27{,}3$? $\log_{\frac{1}{3}} 19{,}6$? $\log_{0,3} 0{,}7$? $\log_{0,3} 5{,}1$? $-\log_2\frac{19}{7}$? $-\log_{15}16$? $\log_3 7-1$? $1-\log_4 9$? $\log_{\frac{2}{3}} 9-\log_{\frac{1}{3}} 9$? $\log_{\frac{2}{3}} 9-\log_{\frac{2}{3}} 7$?

25. Логарифмы каких целых чисел достаточно иметь, чтобы можно было вычислить (при том же основании) логарифмы следующих чисел: 36? 120? $1{,}08\frac{4}{75}$? [2, 3, 5].

26. Как изменится логарифм числа, если это число: 1) удвоить? 2) утроить? 3) разделить на 3?

27. Одно число получается из другого умножением (или делением) на 10^n. Сравнить по величине: 1) десятичные логарифмы этих чисел; 2)* натуральные логарифмы этих чисел.

[1) Отличаются на n; 2) отличаются на $n \ln 10$].

28. Из двух данных чисел выделить наибольшее:

1) $5 \lg 796$; $\lg 796$; 2) $7 \lg 1$, $\lg 1$; 3) $3 \lg 0{,}723$, $\lg 0{,}723$;

4) $\log_3 3{,}9$, $\log_3 3{,}92$; 5) $\log_{\frac{1}{3}} 4{,}8$, $\log_{\frac{1}{3}} 4{,}83$; 6) $\log_2 0{,}7$, $\log_2 0{,}75$; 7) $\log_{\frac{1}{2}} 0{,}7$, $\log_{\frac{1}{2}} 0{,}75$; 8) $\log_9 7$, $\log_7 9$.

29. Сравнить с единицей значения N, если: 1) $\log_2 N = -0{,}1$; 2) $\log_{\frac{1}{2}} N = 1{,}3$. [$N < 1$].

30. Сравнить с единицей число a, если: 1) $\log_a 17 = 0{,}2$; 2) $\log_a 0{,}17 = -2$; 3) $\log_a 1{,}7 = -2$.

[1) $a > 1$; 2) $a > 1$; 3) $a < 1$].

31. Сравнить числа N_1 и N_2 в каждом из следующих двух случаев: 1) $\lg N_1 > \lg N_2$; 2) $\log_{0,1} N_1 > \log_{0,1} N_2$.

[1) $N_1 > N_2$; 2) $N_1 < N_2$].

32. Известно, что: 1) $\log_x 0{,}7 > \log_x 0{,}5$; 2) $\log_x 1{,}7 < \log_x 1{,}5$. Сравнить с единицей основание x в каждом из этих случаев. [1) $x > 1$; 2) $x < 1$].

33. При каких значениях x справедливы неравенства:

1) $\log_x 7 < \log_x 9$? 2) $\log_x \frac{3}{4} < \log_x \frac{1}{3}$? 3) $\log_3 x - 1 > 0$?

4) $\log_{\frac{2}{3}} x - 1 > 0$?

$\left[1)\ x > 1;\ 2)\ 0 < x < 1;\ 3)\ x > 3;\ 4)\ 0 < x < \frac{2}{3}\right]$.

34. Для каких значений x справедливо неравенство 1) $\log_a x < 2 \log_a x$? 2) $\log_a x \geqslant 2 \log_a x$? Рассмотреть случаи: 1) $a > 1$ и 2) $0 < a < 1$.

35. Какие числа могут быть основаниями систем логарифмов? Сколько систем логарифмов может быть? Какие из систем логарифмов наиболее употребительны? Какое число имеет один и тот же логарифм в любой системе?

36. Какое множество образуют логарифмы всех чисел, представляющих собой целые степени основания системы логарифмов?

37. Показать, что десятичный логарифм любого натурального числа, не равного целой степени 10 ($N \neq 10^k$, где k — целое число), не может быть рациональным числом.

[Пусть $\lg N = \frac{m}{n}$, где $\frac{m}{n}$ — несократимая дробь. Тогда $10^{\frac{m}{n}} = N$, $10^m = N^n$, что противоречит условию $N \neq 10^k$].

38. 1) Известно, что $\log_a N = b$. Найти $\log_{\frac{1}{a}} N$. Какой вывод можно сделать? 2) Найти $\log_{0,1} 3$, если $\lg 3 \approx 0{,}477$. 3) Вычислить $\log_a N + \log_{\frac{1}{a}} N$.

[1) Логарифмы одного и того же числа при основаниях a и $\frac{1}{a}$ — противоположные числа; 3) 0].

39. 1) Зная, что $\log_a N = x$, найти $\log_a \frac{1}{N}$. 2) Вычислить $\log_a N + \log_a \frac{1}{N}$. 3) Какой зависимостью связаны x и z, если $\log_a x = -\log_a z$? $\left[1) -x;\ 2)\ 0;\ 3)\ x = \frac{1}{z}\right]$.

40. Доказать, что разность между логарифмами двух последовательных натуральных чисел, по мере возрастания этих чисел, убывает ($a > 1$).

$$\left[\log_a(n+1) - \log_a n = \log_a\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right].$$

41. Основание системы логарифмов равно 5. Логарифмы каких чисел N в этой системе имеют: 1) положительную характеристику? 2) отрицательную?[1]

§ 4. Десятичные логарифмы

42. Почему в вычислительной практике широко используются десятичные логарифмы?

43. Известно, что $\lg 27$, с точностью до 0,001 с недостатком, равен 1,431. Между какими

[1] Под характеристикой здесь понимается целое число, стоящее перед положительной дробной частью логарифма.

двумя степенями числа 10 (всзможно менее отличающимися друг от друга) заключается число 27?

$[10^{1,431} < 27 < 10^{1,432}]$.

44. Известны десятичные логарифмы простых чисел: $\lg 2 \approx 0{,}301$, $\lg 3 \approx 0{,}477$, $\lg 7 \approx 0{,}845$. 1) Для каких натуральных чисел между 1 и 20 можно вычислить десятичные логарифмы в этом случае? 2) С какой точностью могут быть вычислены эти логарифмы? 3) Какой общий вид имеют целые числа, для которых могут быть вычислены десятичные логарифмы с помощью данных логарифмов? [1) 4, 5, 6, 8, 9, 12, 14, 15, 16, 18; 2) до 0,01; 3) $2^n \cdot 3^m \cdot 5^p \cdot 7^q$, где n, m, p, q — натуральные числа и 0].

45. Логарифмы каких чисел достаточно знать для того, чтобы можно было вычислить десятичные логарифмы всех натуральных чисел первого десятка? [2, 3, 7].

46. Логарифмы каких натуральных чисел, не превосходящих 100, можно вычислить, зная $\lg 2$ и $\lg 3$?

47. Известно, что $\lg 29 \approx 1{,}462$. Найти логарифмы чисел: 2 900; 2,9; 0,29.

48. Найти характеристики десятичных логарифмов следующих чисел: 1; 5; 20; 45 689; 0,1; 0,5; 2,07; 0,02; 0,068; 0,004593.

49. Сколько существует таких целых чисел, десятичные логарифмы которых имеют следующую характеристику: 1) 1? 2) 2? 3) 3?

50. Разность десятичных логарифмов двух чисел равна: 1) 1; 2) 2; 3) 3. Найти отношение этих чисел. [10, 100, 1 000].

51. Найти отношение двух чисел, если их десятичные логарифмы отличаются только характеристиками.

[Отношение этих чисел равно целой степени основания 10].

52. Что можно сказать о величине отношения двух чисел, если их десятичные логарифмы имеют одинаковые характеристики?

[Отношение большего из этих чисел к меньшему меньше 10].

53. Представить в естественной форме следующие логарифмы: 1) $\overline{1}{,}4235$; 2) $\overline{2}{,}0009$; 3) $\overline{3}{,}9999$.

54. Представить в искусственной форме следующие отрицательные логарифмы: 1) $-1{,}6789$; 2) $-2{,}3445$; 3) $-1{,}9999$.

55. Найти характеристику результата:

1) $-\overline{2},3789$ $\quad$ 2) $-\overline{1},4593$
$\quad\overline{1},9876 \qquad\qquad\overline{2},9897$

56. Заменить вычитание сложением: 1) $a - 3{,}890$; 2) $b - 0{,}587$; 3) $a - 1{,}990$; 4) $a - 2{,}999$.

57. Известно, что $\lg 3 \approx 0{,}477$ и $\lg 5 \approx 0{,}699$. Найти:

1) $-\lg 3$; 2) $\lg \frac{1}{5}$; 3) $\lg \frac{1}{3}$; 4) $\lg 0{,}05$; 5) $-\lg 0{,}5$;

6) $-\lg 0{,}005$.

58. Как вычислить: 1) $x = -\frac{7{,}3\sqrt{9{,}2}}{0{,}4^5}$;

2) $x = 6{,}85\sqrt[7]{-10{,}43}$, пользуясь таблицей десятичных логарифмов?

[Вычислить абсолютную величину x и взять ее со знаком —].

59. Известно, что $\lg 2 \approx 0{,}301$. Найти основание системы логарифмов (a), если: 1) $\log_a 2 \approx 3{,}01$; 2) $\log_a 2 \approx 0{,}1505$. [1) $\sqrt[10]{10}$; 2) 10^2].

60. Известно, что $\lg 2 \approx 0{,}301$. 2) Сколько цифр в числе 2^{10}? 2) Сколько цифр в числе 2^{100}? [1) 4; 2) 31].

§ 5. Различные системы логарифмов *

61. Доказать тождества: 1) $\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a}$; 2) $\log_b a \cdot \log_a b = 1$. Сформулировать теоремы, выражающие эти тождества.

[1) Следует прологарифмировать тождество $a^{\log_a N} = N$ по основанию b].

62[1]. Как можно вычислить $\ln 10$, если $\lg e \approx 0{,}4343$?

$$\left[\ln 10 = \frac{1}{\lg e}\right].$$

63. Какая существует зависимость между десятичными и натуральными логарифмами одного и того же числа N?

$$\left[\ln N = \frac{\lg N}{\lg e} = \frac{\lg N}{0{,}4343} = \lg N \cdot 2{,}3026\right].$$

64. Что больше: десятичный или натуральный логарифм данного числа N?

[$N > 1$ — натуральный логарифм больше, $N = 1$ — натуральный логарифм равен десятичному, $N < 1$ — натуральный логарифм меньше].

65. Вычислить: 1) $\log_{25} 125$; 2) $\log_{\sqrt{5}} 125$; 3) $\log_{\frac{1}{5}} 125$; 4) $\log_{\frac{1}{25}} 125$.

---

[1] $e = 2{,}71828\ldots$

[Целесообразно заменить искомые логарифмы логарифмами при основании 5].

66. Найти: $\log_{a^2} N$; $\log_{a^3} N$; $\log_{\sqrt{a}} N$; $\log_{\sqrt[3]{a}} N$; $\log_{\frac{1}{a}} N$; $\log_{\frac{1}{a^3}} N$, если $\log_a N = b$.

$$\left[\frac{b}{2};\ \frac{b}{3};\ 2b;\ 3b;\ -b;\ -\frac{b}{2}\right].$$

67. Найти: 1) $\log_{25} 2$; 2) $\log_9 \sqrt[3]{2}$; 3) $\log_5 \sqrt{125}$, если $\log 2 = a$, $\log 3 = b$, $\log 5 = c$.

$$\left[1)\ \frac{a}{2c};\ 2)\ \frac{a}{6b};\ 3)\ \frac{c}{2a}\right].$$

68. Как найти $\log_2 5$ по таблицам десятичных логарифмов?

$$\left[\frac{\lg 5}{\lg 2}\right].$$

69. Вычислить, не пользуясь таблицами логарифмов, $\log_9 5 \cdot \log_{25} 27$.

$$\left[\frac{\lg 5}{\lg 9} \cdot \frac{\lg 27}{\lg 25} = \frac{\lg 5 \cdot 3 \lg 3}{2 \lg 3 \cdot 2 \lg 5} = \frac{3}{4}\right].$$

70. Решить уравнение: 1) $\log_2 z + \log_4 z + \log_8 z = 1\frac{5}{6}$;

2) $\log_3 z + \log_9 z^2 = 2$ [1) $z = 2$; 2) $z = 3$].

71. Доказать, что отношение $\frac{\log_a M}{\log_a N}$ не зависит от основания логарифмов a.

$$\left[\frac{\log_a M}{\log_a N} = \left(\frac{\log_b M}{\log_b a}\right) : \left(\frac{\log_b N}{\log_b a}\right) = \frac{\log_b M}{\log_b N}\right].$$

72. Доказать, что $\frac{\log_a N}{\log_b N} = \frac{\log_a M}{\log_b M}$. Сформулировать теорему, выражающую это тождество. Дать графическое истолкование этой теореме.

[Логарифмы чисел при основаниях a и b пропорциональны].

§ 6. Показательные и логарифмические уравнения

73. Решить следующие уравнения и произвести проверку корней: 1) $6^{1-x} = 216$; 2) $\sqrt[3]{128} = 2^{3x}$; 3) $(\sqrt[4]{9})^x = 243$; 4) $4^{x-2} = 5^{2-x}$; 5) $a^{(x-2)(3-x)} = 1$; 6) $5^{(x^2+x-2)(3-x)} = 1$; 7) $7^{x^2-5x+9} = 343$; 8) $8^{x+1} = 0{,}125^x$; 9) $0{,}2^{x-3} = 25$; 10) $\left(\frac{9}{25}\right)^x = \left(\frac{5}{3}\right)^{-7}$; 11) $\left(\frac{5}{11}\right)^{2x-3} = \left(2\frac{1}{5}\right)^{3x-2}$.

[1) -2; 2) $\frac{7}{9}$; 3) 10; 4) 2; 5) 2, 3; 6) 1, -2, 3; 7) 2, 3; 8) $-\frac{1}{2}$; 9) 1; 10) $3\frac{1}{2}$; 11) 1].

74. Решить уравнения и проверить корни 1) $3^{\sqrt[x]{2}} = 81$; 2) $3^{3x} = \sqrt[3x]{3}$; 3) $\sqrt[x]{a^{x^2-x}} = 1$; 4) $\sqrt{\frac{1}{32}} = \left(\frac{1}{512}\right)^{-x}$;

5) $2^{2^{\sqrt{2x}}} = 16$; 6) $(\sqrt{x})^x = x^{\sqrt{x}}$; 7) $\sqrt[3]{1{,}5^{7x}} = \frac{8}{27}$.

$\left[1)\ \frac{1}{2};\ 2)\ \pm\frac{1}{3};\ 3)\ 1;\ 4)\ -\frac{5}{18};\ 5)\ 2;\ 6)\ 1,\ 4;\ 7)\ -\frac{9}{7}\right]$.

75. Решить уравнения: 1) $9^{7x} = 3^x$; 2) $6{,}25^{2x+1} = 0{,}16^{2x-1}$; 3) $\sqrt{0{,}8^{2x+2}} = \sqrt[3]{1{,}25^{6x-12}}$; 4) $\sqrt[5]{7^{-2}} = \sqrt[x]{343}$; 5) $\left(\frac{1}{a}\right)^x - \sqrt[7]{a^3} = 0$; 6) $\frac{1}{4}\cdot 8^{2x} = 1\,024$; 7) $2^{3x}\cdot 5^x = 1\,600$; 8) $\left(\frac{3}{5}\right)^x \cdot \left(2\frac{7}{9}\right)^x = 1$; 9) $3^{x+2} - 3^x = 72$; 10) $3^{2x} - 4\cdot 3^x + 3 = 0$; 11) $4^x + 2^{x+1} = 80$; 12) $5^{x-1} + 5^{x-2} + 5^{x-3} = 155$; 13) $3^{2x} - 2\cdot 3^{2x-1} - 2\cdot 3^{2x-2} = 1$.

[1) 0; 2) 0; 3) 1; 4) $-7\frac{1}{2}$; 5) $-\frac{3}{7}$; 6) 2; 7) 2; 8) 0; 9) 2; 10) 1, 0; 11) 3; 12) 4; 13) 1].

76. Решить уравнение: $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{c}} = \sqrt[x]{\left(\frac{b}{a}\right)^m}$. [$-c$].

77. Решить уравнения и проверить корни: 1) $10^{\lg(x+10)} = 10\,000$, 2) $\lg y + \lg(y-1) = \lg 56$; 3) $\lg\left(5 - \frac{x}{3}\right) + \lg 3 = 1$; 4) $\lg(z+1) + \lg(z-1) = \lg 3$; 5) $\lg y(\lg y - 8) + 16 = 0$; 6) $x\log_b x = 0$; 7) $\lg(y^3 - 8) - \lg(y^2 + 2y + 4) = 1$; 8) $\lg x + \lg x^2 + \lg x^3 = 6$; 9) $\frac{\lg x}{1 - \lg 2} = 3$.

[1) 9990; 2) 8; 3) 5; 4) 2; 5) 10000; 6) 1; 7) 12; 8) 10; 9) 125].

78. Решить уравнения и проверить корни:

1) $\log_2\log_2\log_2 x = 0$;
2) $\log_2\log_3\log_5 x = 0$;
3) $\log_a\log_b\log_c x = 0$;
4) $x^{\lg x^2} = x^2$;
5) $y^{\lg y^2} = y^3$;
6) $10^{x+\lg 2} = 20$;
7) $x^{\lg^2 x - 2\lg x} = 0{,}1$;
8) $x^{2+\lg x} = 0{,}1$.

[1) 4; 2) 125; 3) c^b; 4) 1, 10; 5) 1, $\sqrt{10^3}$; 6) 1; 7) 10, 0,1; 8) 0,1].

79. Решить системы уравнений: 1) $\begin{cases} \lg x + \lg y = 1, \\ \lg x - \lg y = 5; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \lg x + \lg y = 4, \\ x^{\lg y} = 1\,000; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} \lg x - \lg y = 1, \\ x + 5y = 75; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \frac{a^x \cdot a^y}{a^5} = a^8, \\ (a^x)^y = a^{30}; \end{cases}$

5) $\begin{cases} \frac{a^x \cdot a^y}{a^{2,5}} = \sqrt{a^5}, \\ \frac{(a^x)^y}{a^{4,5}} = \sqrt{a^3}; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} \sqrt[x]{x+y} = 2, \\ (x+y) \cdot 5^x = 100. \end{cases}$

[1) 1 000, 0,01; 2) 1 000, 10 и 10, 1 000; 3) 50, 5; 4) 3, 10 и 10, 3; 5) 2, 3 и 3, 2; 6) 2, 2].

ГЛАВА XI. СОЕДИНЕНИЯ И ФОРМУЛА СТЕПЕНИ БИНОМА

Указания

1. В § 1 «Соединения» звездочкой отмечены упражнения 28 и 29, для ответа на которые надо оперировать понятиями множества и подмножества, не обязательными для учащихся средней школы, и упражнения 37—45, для ответа на которые надо знать формулы соединений с повторениями.

2. Весь § 2 «Задачи на вычисление вероятностей» (набран петитом) может быть использован как материал для внеклассных занятий, причем упражнения 47—61 требуют только выражения вероятности дробью. Более сложные упражнения 61—73 отмечены звездочкой.

§ 1. Соединения

1. Сколькими способами можно разместить три лошади в четырех стойлах? [$A_4^3 = 24$].

2. Сколько различных трехзначных чисел можно записать с помощью цифр 2, 4, 5, не повторяя их? [$P_3 = 6$].

3. Из шести кандидатов в счетную комиссию необходимо избрать трех. Сколькими способами можно это сделать? [$C_6^3 = 20$].

4. В вагоне трамвая 16 двухместных диванов. Сколькими способами могут разместиться на них 32 пассажира? [P_{32}].

5. На станции имеются восемь запасных путей. Сколькими способами можно расставить на них три поезда? [$A_8^3 = 336$].

6. На плоскости даны n точек, расположенных так, что никакие три из них не лежат на одной прямой. Определить, сколько различных прямых можно провести, соединяя эти точки попарно.

$\left[C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}\right]$.

7. Сколько различных диагоналей можно провести в: 1) восьмиугольнике? 2) двенадцатиугольнике? 3) пятнадцатиугольнике? 4) n-угольнике?

[1) 20; 2) 54; 3) 90; 4) $C_n^2 - n$].

8. На плоскости даны n точек, причем никакие три из них не лежат на одной прямой. Каждые три точки из данных, рассматриваемые как вершины, определяют треугольник. Сколько всего треугольников определяют данные точки? [C_n^3].

9. На плоскости даны n прямых так, что среди них совсем нет параллельных друг другу и никакие три из них не пересекаются в одной точке. Определить число всех точек попарного пересечения этих прямых. [C_n^2].

10. Арифметическая и геометрическая прогрессии определяются тремя величинами из пяти (a_1, a_n, n, S_n, d или q), в некоторых случаях неоднозначно. Сколько основных задач на арифметическую прогрессию, а также на геометрическую, можно составить? [10].

11. В школьном шахматном турнире участвуют восемь учеников. Каждый из участников с каждым из остальных должен сыграть две партии. Сколько всего партий должны сыграть участники турнира? [$2C_8^2 = 56$].

12. В X классе школы было 30 учащихся. Перед окончанием школы они решили обменяться своими фотографиями. Сколько фотокарточек было роздано? [$A_{30}^2 = 870$].

13. Имеются шесть предметов. Они распределяются на две группы так, что в одной оказываются два, а в другой четыре предмета. Сколько таких распределений возможно? [$C_6^2 = 15$].

14. В выходной день в школе собираются 10 учеников, чтобы пойти на экскурсию в музей. Каждый приходящий ученик рукопожатием здоровается с уже собравшимися учениками. Определить число рукопожатий. [45].

15. Сколько различных четырехзначных чисел можно записать с помощью цифр 2, 3, 5, 0, если каждая из этих цифр в запись числа может входить лишь один раз? [$P_4 - P_3 = 18$].

16. Имеются три флага: красный, белый и зеленый. Сколько различных сигналов можно передать, вывеши-

вая эти флаги на мачте, если нельзя вывесить более трех флагов одновременно? [3 + 6 + 6 = 15].

17. Вычислить: 1) C_6^5; 2) C_6^6; 3) C_{100}^{98}; 4) P_5; 5) P_6; 6) P_7; 7) $\frac{P_8}{P_6}$; 8) $\frac{P_5 + P_4}{P_3}$; 9) A_5^3; 10) A_5^4; 11) A_5^5; 12) $\frac{A_7^4 + A_7^3}{A_7^2}$.

[1) 6; 2) 1; 3) 4 950; 4) 120; 5) 720; 6) 5 040; 7) 56; 8) 24; 9) 60; 10) 120; 11) 120; 12) 25].

18. Что означает $(2n-3)!$? [$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots (2n-4)(2n-3)$].

19. Сколько предметов нужно взять, чтобы число всевозможных перестановок из них было равно 720? [$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot m = 720, m = 6$].

20. Выразить число размещений из m элементов по n, пользуясь: 1) символом факториала; 2) символом, обозначающим число перестановок.

$\left[1)\ A_m^n = \frac{m!}{(m-n)!};\ 2)\ A_m^n = \frac{P_m}{P_{(m-n)}}\right]$.

21. Имеются сочетания из m элементов по n. Как из них получить размещения из тех же m элементов по n?

22. Пользуясь символом факториала, выразить число сочетаний из m элементов по n. $\left[C_m^n = \frac{m!}{(m-n)!n!}\right]$.

23. Во сколько раз число A_8^3 больше числа C_8^3? Дать ответ на этот вопрос, не вычисляя A_8^3 и C_8^3. [В 6 раз].

24. Доказать, что $A_m{}^{-1} (m > 1)$ равняется P_m.

[$A_m^{m-1} = m\ (m-1)\ (m-2) \ldots \{m - [(m-1) - 1]\} = m(m-1)(m-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 = P_m$].

25. Как следует определить C_n^0, чтобы равенство $C_n^k = C_n^{n-k}$ было справедливо и в этом случае? [$C_n^0 = 1$].

26. Вычислить сумму цифр всех четырехзначных чисел, которые могут быть записаны с помощью цифр: 1, 4, 5, 2 без повторений. [12 $P_4 = 288$].

27. Имеются пять предметов, из которых можно выбрать один, два, три и т. д. Сколько возможно различных выборов? [$C_5^1 + C_5^2 + C_5^3 + C_5^4 + C_5^5 = 31$].

28*. Подмножеством данного множества называется любая часть этого множества. Дано множество, состоящее из шести элементов. Найти число трехэлементных подмножеств данного множества. [C_6^3].

29*. Дано множество, состоящее из пяти элементов. Найти число всевозможных подмножеств, состоящих из одного, двух, трех и четырех элементов данного множества. [$C_5^1 + C_5^2 + C_5^3 + C_5^4 = 30$].

30. Сколько чисел, начинающихся с цифры 5, можно получить, переставляя всевозможными способами цифры числа 19058? [$P_4 = 24$].

31. С помощью цифр: 1, 2, 3, 4, 5 без повторений записаны различные пятизначные числа. Сколько среди этих чисел таких, первые две цифры которых образуют число 23? [$P_3 = 6$].

32. Сколько имеется среди всех перестановок из m элементов таких, которые: 1) начинаются определенным элементом a? 2) в которых определенный элемент a стоит на втором месте? [1) и 2) $P_{m-1} = (m-1)!$].

33. Упростить: 1) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}$; 2) $\frac{n!}{(n-3)!}$

34. Среди всевозможных пятизначных чисел, записанных с помощью цифр: 1, 2, 3, 4, 5, без повторений, сколько таких, которые не кончаются: 1) цифрой 5? 2) цифрами 45? [1) $P_5 - P_4 = 96$; 2) $P_5 - P_3 = 114$].

35. Среди сочетаний из 10 букв: *а*, *б*, *в*, *г*, ... *к*, по 4 буквы, сколько таких сочетаний, которые не содержат: 1) буквы *а*? 2) букв *а* и *б*? [1) C_9^4; 2) C_8^4].

36. Среди размещений из 12 букв: *а*, *б*, *в*, *г*, ... *м*, по 5 букв, сколько таких размещений, которые не содержат: 1) буквы *а*? 2) букв *а* и *б*? [1) A_{11}^5; 2) A_{10}^5].

37*. Сколько можно написать трехзначных чисел, пользуясь девятью цифрами: 1, 2, 3, ... 9, если каждая из этих цифр в записи числа может встречаться не один раз? [$9^3 = 729$].

38*. Вывести формулу для вычисления числа размещений с повторениями.

Указание. $\overline{A}_m^2 = m^2$; $\overline{A}_m^3 = \overline{A}_m^2 \cdot m = m^3$ и т. д. [$\overline{A}_m^n = m^n$].

39*. Сколько различных четырехзначных чисел можно написать, пользуясь цифрами: 1, 3, 4, 5, если каждую из этих цифр можно писать несколько раз? [256].

40*. Сколько можно написать трехзначных чисел, пользуясь всеми 10 цифрами, если цифры можно повторять? [$10^3 - 10^2 = 900$].

41*. Сколько различных сигналов можно передать, вывешивая на мачте флаги, если всего имеется по три флага белого, красного и зеленого цветов и больше трех флагов одновременно вывесить нельзя? [$3 + 9 + 27 = 39$].

42*. Сколько различных натуральных чисел можно записать, пользуясь цифрами: 1, 2, 3, если разрешается писать не более 4 цифр и каждую цифру можно повторять? [$3 + 9 + 27 + 81 = 120$].

43*. На диске телефонного аппарата имеется 10 цифр. Каждый телефон автоматической телефонной станции имеет номер, записываемый шестью цифрами. Найти наибольшее число телефонов, которые может обслужить такая станция? [$10^6 = 1\,000\,000$].

44*. Сколько различных пятизначных чисел можно написать, пользуясь цифрами: 1) 2, 2, 2, 3, 5? 2) 1, 1, 2, 2, 4? $\left[1)\ \frac{P_5}{P_3};\ 2)\ \frac{P_5}{P_2 \cdot P_2}\right]$.

45*. Сколько делителей имеют числа: 1) 108? 2) 2 700 (единица и само число считаются делителями)?

[1) $108 = 2^2 \cdot 3^3$. Все делители данного числа имеют вид $2^\alpha \cdot 3^\beta$, где α принимает значения: 0, 1, 2, а β — 0, 1, 2, 3, независимо друг от друга. Поэтому число всевозможных делителей равно $3 \cdot 4 = 12$; 2) $3 \cdot 3 \cdot 4 = 36$].

§ 2. Задачи на вычисление вероятностей *

46. Вероятностью некоторого события называется отношение $\left(\frac{m}{n}\right)$ числа (m) случаев, благоприятствующих этому событию, к числу (n) всех несовместимых и равновозможных случаев. Например, вероятность того, что брошенная вверх монета упадет гербом кверху, равна $\frac{1}{2}$. В сосуде имеются 4 белых, 2 черных и 5 красных шаров. Найти вероятность того, что вынутый наудачу шар будет белым или красным. $\left[\frac{9}{11}\right]$.

47. Стрелок в определенных условиях стрельбы попадает в цель, в среднем, 90 раз при 100 выстрелах. Определить вероятность поражения стрелком цели в этих условиях. [0,9].

48. На школьных соревнованиях по бегу участвуют 120 человек, примерно одинаковой спортивной квалификации. От одной школы послали для участия в этих соревнованиях 6 человек. Как велика вероятность, что первое место на этих соревнованиях займет представитель этой школы? [0,05].

49. Ученика из 25 экзаменационных билетов по геометрии особенно интересуют 20 билетов. 1) Какова вероятность того, что на экзамене по геометрии этот ученик будет отвечать по интересующему его билету? 2) Как изменится эта вероятность, если число интересующих ученика билетов увеличится? [0,8].

50. Как следует понимать такие выражения: 1) вероятность события A равна 1? 2) вероятность события B равна $\frac{1}{2}$? 3) вероятность события C равна 0?

51. Некоторый завод одно время работал так, что из 1 000 готовых изделий, в среднем, два оказывались с браком. Определить вероятность изготовления полноценных изделий в указанное время на этом заводе? [0,998].

52. На автобусной остановке проводится посадка в автобусы № 3, 5, 7, 8, 10, проходящие одинаково часто. Человеку, ждущему автобуса на этой остановке, можно ехать в автобусах № 3 и 7. Найти вероятность того, что первый автобус, подошедший к остановке, будет ожидаемого номера? $\left[\frac{2}{5}\right]$.

53. Телефонная линия, соединяющая районный центр с колхозом, имеет длину 12 *км*. Во время грозы произошло повреждение на этой линии. Найти вероятность того, что повреждение произошло на первых трех километрах от районного центра. $\left[\frac{1}{4}\right]$.

54. Задумано некоторое двузначное число. Какова вероятность, что сумма цифр этого числа будет равна 6? $\left[\frac{6}{90}=\frac{1}{15}\right]$.

55. На клумбе 20 красных астр, 10 синих и 30 белых. Какова вероятность, что сорванная в темноте астра окажется красной или синей? $\left[\frac{1}{2}\right]$.

56. Имеются 5 букв: *р, е, г, й, о*. Какова вероятность того, что произвольное расположение их одной за другой даст слово «герой»? $\left[\frac{1}{P_5}=\frac{1}{120}\right]$.

57. Какова вероятность того, что задуманное в пределах 100 целое число делится на 10 или 11? $\left[\frac{19}{100}\right]$.

58. Вычислить вероятность того, что некоторое определенное событие не произойдет, если известно, что при n испытаниях оно происходит в m случаях. $\left[\frac{n-m}{n}=1-\frac{m}{n}\right]$.

59. Опыты показывают, что из 100 000 атомов полония самопроизвольно распадаются в течение суток 495 (радиоактивный распад). 1) Найти вероятность распада в течение суток атома полония. 2) Найти вероятность того, что за сутки атом полония не распадется. $\left[1)\ \frac{495}{100\,000};\ 2)\ 1-\frac{495}{100\,000}\right]$.

60. Во многих настольных детских играх бросается небольшой костяной или деревянный кубик, на гранях которого цифрами или кружочками указано число очков: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Этот кубик назы-

вают игральной костью. Вычислить вероятность того, что при бросании игральной кости выпадет грань с четным номером.

61*. Бросаются две игральные кости. Определить вероятность того, что сумма выпавших очков на костях будет равна 8. $\left[\frac{5}{36}\right]$.

62*. Определить вероятность того, что при одновременном бросании двух игральных костей сумма выпавших очков окажется меньше 5. $\left[\frac{3+2+1}{36}=\frac{1}{6}\right]$.

63*. Бросаются три одинаковые монеты. Вычислить вероятность выпадения: 1) трех гербов; 2) только двух гербов; 3) только одного герба. $\left[1)\ \frac{1}{8};\ 2)\ \frac{3}{8};\ 3)\ \frac{3}{8}\right]$.

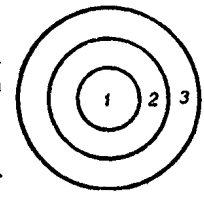
64*. Двое задумали по одному целому числу: первый между 0 и 51, второй между 50 и 101. Какова вероятность, что оба задумали числа, кратные 11? $\left[\frac{4\cdot5}{50\cdot50}=0{,}008\right]$.

65*. Имеются два ящика с шарами. В первом — 3 белых, 7 черных, во втором — 6 белых и 9 черных. Вынимается по одному шару из каждого ящика. Какова вероятность, что оба шара окажутся белыми? $\left[\frac{3\cdot6}{10\cdot15}=\frac{3}{25}\right]$.

66*. Один из мальчиков родился в марте, а другой в апреле. Какова вероятность того, что оба они родились в первой неделе месяца? $\left[\frac{7\cdot7}{31\cdot30}=\frac{49}{930}\right]$.

67*. Определить вероятность того, что при бросании монеты 10 раз она все 10 раз упадет одной и той же стороной вверх. $\left[\frac{1}{2^{10}}\right]$.

68*. Ведется стрельба по мишени (черт. 7). Для некоторого стрелка вероятность попасть в круг 1 равна 0,25, а в кольцо 2 — 0,15. Какова вероятность попасть в круг 1 или кольцо 2? $\left[\frac{25+15}{100}=0{,}4\right]$.



Черт. 7.

69*. Имеется лабиринт с шестью разветвлениями пути. Из каждого разветвления идут два пути, причем один из них ведет в тупик. Вычислить вероятность пройти по этому лабиринту, не заходя ни в один из тупиков. $\left[\frac{1}{2^6}\right]$.

70*. Из натуральных чисел, не превосходящих: 100, 1 000, 6 000, берется число. Какова вероятность того, что это число будет: 1) простым? 2) составным? (Простых чисел меньше 100—25, меньше 1 000—168, меньше 6 000—784).

[1) 0,25; 0,168; 0,130(6); 2) 0,75; 0,832; 0,869(3)]

71.* Из натуральных чисел, не превосходящих 100, берутся два произвольных числа. Определить вероятность того, что оба эти числа будут простыми. $\left[\frac{25\cdot 24}{100\cdot 99}=\frac{2}{33}\right]$.

72*. Из 10 мальчиков и 8 девочек должно быть выделено для участия в туристском походе 5 человек. Определить вероятность следующего состава этой группы: 2 мальчика и 3 девочки. $\left[\frac{C_{10}^2\cdot C_8^3}{C_{18}^5}\right]$.

73*. Один стрелок дает 80 попаданий при 100 выстрелах, а другой 60. Найти вероятность поражения цели, т. е. попадания в нее хотя бы одной пули, если оба стрелка стреляют в нее одновременно.

$$\left[\frac{80+20\cdot\frac{3}{5}}{100}=0{,}92\right].$$

§ 3. Формула степени бинома

74. Возвысить в квадрат многочлены: 1) $a+2b+3c$; 2) $1-a+a^2$; 3) $x+2-3x^2$.

75. Найти многочлены, квадраты которых равны: 1) $a^4+b^2+1+2a^2b+2a^2+2b$; 2) $9x^6+x^2+4-6x^4+12x^3-4x$; 3) $4x^2+9y^2+z^2+12xy-4xz-6yz$. [1) a^2+b+1; 2) $3x^3-x+2$; 3) $2x+3y-z$].

76. Найти произведение двучленов: 1) $(a+1)(a+2)(a+3)$; 2) $(x-1)(x-2)(x-3)$.

[1) $a^3+6a^2+11a+6$; 2) $x^3-6x^2+11x-6$].

77. Найти коэффициент при x^2 в произведении $(x-3)(x+5)(x-1)(x+2)$. [-15].

78. Представить в виде многочлена: 1) $(x+y)^4$; 2) $(a-b)^5$; 3) $(x+1)^6$; 4) $(1-x)^7$.

79. Преобразовать: 1) $(x+1)^4+(x-1)^4$; 2) $(a+b)^5-(a-b)^5$; 3) $(a+x)^6+(a-x)^6$. [1) $2x^4+12x^2+2$; 2) $10a^4b+20a^2b^3+2b^5$; 3) $2a^6+30a^4x^2+30a^2x^4+2x^6$].

80. Вычислить: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ при $n=1, 2, 3, 4$.

$$\left[2;\ 2\tfrac{1}{4};\ 2\tfrac{10}{27};\ 2\tfrac{113}{256}\right].$$

81. Определить коэффициенты второго, пятого и шестого членов многочлена, получающегося в результате возвышения в седьмую степень двучлена $(2x-y)$. [1) -448; 2) 280; 3) -84].

82. Определить биномиальные коэффициенты второго, четвертого и пятого членов многочлена, получающегося

в результате возвышения двучлена $(2x-y)$ в седьмую степень. [1) -7; 2) -35; 3) 35].

83. Определить наибольшие коэффициенты разложений 1) $(x+a)^8$; 2) $(y+x)^7$. [1) 70; 2) 35].

84. Найти: 1) четвертый член разложения $(a-2b)^5$; 2) пятый член разложения $(2x-y)^6$; 3) средний член разложения $(a-b)^{16}$. [1) $-80a^2b^3$; 2) $60x^2y^4$; 3) $C_{16}^8 a^8 b^8$].

85. 1) В разложении $\left(x+\frac{1}{x}\right)^6$ найти член, не зависящий от x; 2) найти член разложения $(a+1)^{10}$ с наибольшим коэффициентом. [1) 20; 2) $C_{10}^5 a^5$].

86. Каким образом из формулы разложения $(x+a)^n$ получить формулу разложения $(x-a)^n$? Чем отличаются друг от друга эти разложения?

87. Как воспользоваться формулой степени бинома для вычисления $(a+b-c)^n$? $[(a+b)-c]^n$.

88. Доказать неравенство $(1+\alpha)^n > 1+n\alpha$, если $\alpha > 0$, а n — натуральное число. Будет ли справедливо это неравенство при $n=1$?

$$\left[(1+\alpha)^n = 1+n\alpha+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\alpha^2+\ldots+\alpha^n > 1+n\alpha\right].$$

89. Вычислить сумму коэффициентов членов разложения: 1) $(a+b)^8$; 2) $(a-b)^8$. [1) 256; 2) 0].

90. а) Найти сумму коэффициентов нечетных членов разложений: 1) $(a-b)^9$; 2) $(a+b)^6$; б) найти сумму коэффициентов четных членов разложений: 3) $(a-b)^7$; 4) $(a+b)^7$. [1) 256; 2) 32; 3) -64; 4) 64].

§ 4. Метод математической индукции *

91. В чем сущность доказательства методом математической индукции? Из каких этапов оно состоит?

92. Доказать методом математической индукции справедливость формул для вычисления любого члена и суммы членов 1) арифметической прогрессии; 2) геометрической.

93. Доказать методом математической индукции справедливость формул: $A_n^m = n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)$ и $P_m = m!$

94. Воспользовавшись методом математической индукции, доказать, что сумма ряда нечетных чисел $1+3+5+\ldots+(2n-1)$ равна n^2.

Указание. При n, равном 2, соответствующая сумма действительно равна 2^2, далее следует доказать, что если $S_n = n^2$, то $S_{n+1} = (n+1)^2$.

95. Доказать тождество: $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Указание. $\frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

96. Доказать тождества: 1) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + m^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$; 2) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + m^3 = \left[\frac{m(m+1)}{2}\right]^2$; 3) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + m(m+1) = \frac{1}{3} m(m+1)(m+2)$.

Указание. 1) $\frac{m(m+1)(2m+1)}{6} + (m+1)^2 = \frac{(m+1)(2m^2+7m+6)}{6} = \frac{(m+1)(m+2)(2m+3)}{6}$.

97. Доказать, что при любом натуральном m, $m^3 + 5m$ делится на 6.

98. Доказать, что $a^n - b^n$ делится на $a - b$ при любых целых положительных значениях n.

Указание. $\frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b} = \frac{a^{n+1} - a^n b + a^n b - b^{n+1}}{a-b} = a^n + \frac{b(a^n - b^n)}{a-b}$.

99. Доказать справедливость неравенства $2^m > m$, где m — любое натуральное число.

Указание. $2^{m+1} > m \cdot 2$.

100. Доказать, что если на плоскости даны m точек, причем никакие три из них не лежат на одной прямой, то число всех прямых линий, которые можно провести, соединяя эти точки попарно, равно $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + (m-1)$.

ГЛАВА XII. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Указания

В § 2 напечатанном петитом «Понятия кольца и поля» дано 16 упражнений, снабженных ответами. Приступая к решению этих упражнений, надо убедиться, что учащиеся усвоили § 2 главы V «Понятие множества».

§ 1. Комплексные числа

1. Какое действие становится всегда ся выполнимым благодаря введению нового числа i, квадрат которого полагается равным -1?

2. Составить квадратное уравнение с целыми коэффициентами, корнями которого были бы числа: 1) i и $-i$; 2) $2i$ и $-2i$. [1) $x^2+1=0$; 2) $x^2+4=0$].

3. В каком случае число $a+bi$ называется: 1) действительным? 2) мнимым? 3) чисто мнимым?

[1) $b=0$; 2) $b\neq 0$; 3) $a=0$, $b\neq 0$].

4. Можно ли числа 5 и $5i$ назвать: 1) комплексными? 2) мнимыми? 3) можно ли число $2-3i$ назвать мнимым?

5. Даны числа: $3+2i$, $4-3i$, $-5+2i$, $-7-i$, $5i$, $-4i$, 7, -2, i. Назвать числа: 1) противоположные данным; 2) сопряженные данным; 3) сопряженные числам, противоположным данным.

6. Определяются ли для комплексных чисел соотношения «равно»? «больше»? «меньше»?

7. Принято ли называть чисто мнимые числа ($2i$, $-3i$ и т. д.) «положительными»? «отрицательными»?

8. Известно, что равенство, сумма и произведение комплексных чисел определяются. 1) Произвольны ли эти определения? Почему приняты известные определения, а не какие-нибудь другие? 2) Доказать, что основные свойства сложения и умножения остаются справедливыми и для комплексных чисел.

9. Известно, что частное двух комплексных чисел находится по формуле:

$$(a+bi):(a_1+b_1i)=\frac{aa_1+bb_1}{a_1^2+b_1^2}+i\,\frac{a_1b-ab_1}{a_1^2+b_1^2}.$$

В каком случае эта формула теряет смысл?

[$a_1^2+b_1^2=0$, или $a_1+b_1i=0$].

10. Решить уравнения: $(2-5i)x=2+5i$ и $(2+5i)x=2-5i$. Проверить ответы.

$$\left[-\frac{21}{29}+\frac{20}{29}i;\ -\frac{21}{29}-\frac{20}{29}i\right].$$

11. Выполнить указанные действия: 1) $(1-i)-(1+i)$; 2) $(1+i)(1-i)$; 3) $\frac{1+i}{1-i}$; 4) $\frac{1-i}{1+i}$.

[1) $-2i$; 2) 2; 3) i; 4) $-i$].

12. При каком условии произведение двух или нескольких сомножителей равно 0?

13. Вычислить: 1) i^{17}; i^{33}; i^{82}; i^{27}; i^{40}; i^{1457}; i^{1085}; i^0; 2) $1+i+i^2+i^3$; 3) $i^5+i^6+i^7+i^8$; 4) $1+i^2+i^8$; 5) $i^k+i^{k+1}+i^{k+2}+i^{k+3}$.

Указание. $i^k(1+i+i^2+i^3)=0$.

14. Найти числовое значение многочлена: 1) $x^{21}+3x^6+x^5$ при $x=i$; 2) $2x^{20}+3x^{10}-x^5$ при $x=-i$.

[1) $-3+2i$; 2) $-1+i$].

15. Выполнить указанные действия: 1) $(a+bi)^2$; 2) $(a-bi)^3$; 3) $(a+bi)(a-bi)$; 4) $\frac{a+bi}{a-bi}$; 5) $\frac{1+3i}{2}\cdot\frac{1-3i}{2}$; 6) $(a-bi)-(a+bi)$.

16. Вычислить: 1) $(4-3i)+(-2+i)$; 2) $(-7+i)-(-2-3i)$; 3) $(2+3i)(4-i)$; 4) $(2-3i)^2$; 5) $(1-i)^2$; 6) $(1+i)^2\pm(1-i)^2$; 7) $(1+i)^3\pm(1-i)^3$; 8) $(a+bi)^3+(a-bi)^3$; 9) $(x-1-i)(x+1+i)$; 10) $(1+i)^2+(1-i)^2+(-1+i)^2+(-1-i)^2$.

[3) $11+10i$; 4) $-5-12i$; 5) $-2i$; 6) 0; $4i$; 7) -4; $4i$; 8) $2a^3-6ab^2$; 9) x^2-2i; 10) 0].

17. Упростить: 1) $\frac{1}{1+i}-\frac{1}{1-i}$; 2) $\frac{1+ai}{1-ai}+\frac{1-ai}{1+ai}$.

$\left[1)\ -i;\ 2)\ \frac{2(1-a^2)}{1+a^2}\right]$.

18. Вычислить: 1) $[(1+i)(1-i)]^5$; 2) $\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^4$; 3) $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^5$; 4) $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^7$; 5) $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^5$; 6) $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{4n+2}$; 7) $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{4n+1}$.

[1) 32; 2) -1; 3) i; 4) $-i$; 5) $-i$; 6) -1; 7) $-i$].

19. Пользуясь комплексными числами, разложить на множители: 1) a^2+b^2; 2) a^4+b^4; 3) $3a^2+b^2$; 4) $a^2+\frac{b^2}{4}$; 5) $a+b$; 6) $a+16$.

[1) $(a+bi)(a-bi)$; 3) $(a\sqrt{3}+bi)(a\sqrt{3}-bi)$; 5) $(\sqrt{a}+\sqrt{b}i)(\sqrt{a}-\sqrt{b}i)$].

20. Найти наименьшее целое положительное число n, для которого: 1) $(1+i)^n$ будет действительным числом; 2) $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n$ будет равняться 1. [1) и 2) 4].

21. Найти действительные числа x и y, если: 1) $(1+i)x+(1-i)y=3-i$; 2) $(2-i)x+(1+i)y=5-i$;

[1) 1, 2; 2) 2, 1].

22. При каком условии сумма двух комплексных чисел $a + bi$ и $a_1 + b_1 i$ есть: 1) действительное число? 2) чисто мнимое число? [1) $b = -b_1$; 2) $a = -a_1$, $b \neq -b_1$].

23. При каком условии разность двух чисел $a + bi$ и $a_1 + b_1 i$ есть: 1) действительное число? 2) чисто мнимое число? [1) $b = b_1$; 2) $a = a_1$, $b \neq b_1$].

24. Вычислить: 1) $(3+2i)(3-2i)$; 2) $(4+3i)(20-15i)$; 3) $(3+5i)(5+3i)$.

25. Найти условие, при выполнении которого произведение двух чисел $a + bi$ и $a_1 + b_1 i$ будет: 1) действительным числом; 2) чисто мнимым. Привести примеры, иллюстрирующие ответы.

[1) $ab_1 + a_1 b = 0$, в частности, когда данные числа являются сопряженными; 2) $aa_1 - bb_1 = 0$ при $ab_1 + a_1 b \neq 0$].

26. Доказать, что квадрат числа, представляющего собой сумму двух квадратов, есть также сумма двух квадратов. Привести пример. $[(m^2+n^2)^2=(m+ni)^2(m-ni)^2= =(m^2-n^2+2mni)\ (m^2-n^2-2mni)=(m^2-n^2)^2+(2mn)^2]$.

27. При каком условии квадрат комплексного числа $a+bi$ есть: 1) действительное число? 2) чисто мнимое? [1) $b=0$ или $a=0$; 2) $a=\pm b$].

28. Найти условие, при котором куб комплексного числа есть: 1) действительное число; 2) мнимое.

[1) $3a^2b - b^3 = 0$; 2) $3a^2b - b^3 \neq 0$].

29. Показать, что при возведении в квадрат, куб, вообще в степень с натуральным показателем, двух взаимно сопряженных комплексных чисел снова получаются комплексные взаимно сопряженные числа.

30. Вычислить: 1) $(1+i)^{-1}$; 2) $(1-i)^{-2}$; 3) $(25-13i)^0$;

$$\left[1)\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i;\ 2)\ \frac{1}{2}i;\ 3)\ 1\right].$$

31. Где на комплексной плоскости лежат точки, изображающие следующие числа: 1; -1; i; $-i$; 7; -7; $2i$; $-2i$; $-4i$?

32. В какой четверти комплексной плоскости расположены точки, изображающие числа: $2+7i$; $5-i$; $-3+2i$; $-1-i$? Назвать абсциссы и ординаты этих точек.

33. Где на комплексной плоскости лежит точка, изображающая число $a+bi$, если: 1) $a<0$, $b>0$? 2) $a<0$, $b<0$? 3) $a=0$, $b<0$? 4) $a<0$, $b=0$? 5) $a\neq 0$, $b<0$?

34. Где на комплексной плоскости лежат точки, изображающие: 1) действительные числа? 2) чисто мнимые?

35. Дано комплексное число $a+bi$. Как располагаются на комплексной плоскости точки, изображающие следующие числа: 1) сопряженное данному? 2) противоположное ему? 3) противоположное сопряженному?

36. Где на комплексной плоскости лежат точки, соответствующие числам: 1) $0,1$, $\sqrt{3}$, -5, $-\sqrt{7}$, $-1+i$? 2) $2-3i$, $-2-i$? 3) $4+3i$, $4-3i$, $-4+3i$, $-4-3i$? 4) $2\sqrt{5}-\sqrt{5}i$, $-1+2\sqrt{6}i$?

37. Дана точка, изображающая число $2-3i$. Какие числа будут изображать точки, симметричные данной: 1) относительно действительной оси? 2) мнимой оси? 3) относительно начала координат?

38. Где на комплексной плоскости располагаются точки, изображающие все комплексные числа: 1) действительные части которых равны 7? 2) коэффициенты мнимых частей которых равны -5? 3) имеющие одинаковые действительные части? 4) одинаковые мнимые части?

39. Найти длину отрезка, соединяющего точки, изображающие следующие числа: 1) 0, -4; 2) 5, -2; 3) 3, $4i$; 4) -7, i; 5) $5i$, $-3i$; 6) 0, $1-i$; 7) $1+i$, $2+3i$; 8) $3-2i$, $1+4i$.

40. Каким числом выражается модуль любого комплексного числа? [Действительным неотрицательным].

41. Каков геометрический смысл модуля комплексного числа?

[Длина отрезка, соединяющего начало координат с точкой, изображающей данное комплексное число].

42. Какая точка изображает комплексное число, модуль которого равен 0?

43. Найти модуль комплексного числа: 1) $-1-i$; 2) $1-i$; 3) i; 4) 5; 5) $-bi$; 6) $4-3i$; 7) $-2+i$.

44. Показать, что для действительных чисел понятие модуля совпадает с понятием абсолютной величины числа.

45. Сравнить по величине модули взаимно сопряженных и противоположных комплексных чисел.

46. Даны два комплексных числа: $2+3i$ и $4-5i$. Найти модуль: 1) суммы их; 2) разности; 3) произведения; 4) частного.

$$\left[1)\ \sqrt{40};\ 2)\ \sqrt{68};\ 3)\ \sqrt{533};\ 4)\ \sqrt{\frac{13}{41}}\right].$$

47. Показать, что для двух комплексных чисел: 1) $4-3i$ и $8+6i$ — модуль суммы меньше суммы их модулей; 2) $4-3i$ и $8-6i$ — модуль суммы равен сумме их модулей.

48. Какая теорема о модулях комплексных чисел выражается неравенством:

$$\sqrt{(a+a_1)^2+(b+b_1)^2} \leqslant \sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a_1^2+b_1^2}?$$

[Модуль суммы двух комплексных чисел меньше или равен сумме модулей этих чисел].

49. Известно, что комплексному числу $a+bi$ можно привести в соответствие вектор комплексной плоскости, соединяющий начало координат с точкой (a, b). Как найти сумму векторов, соответствующих двум данным комплексным числам? Какая задача из механики решается аналогичным построением?

50. Как располагаются векторы, изображающие два комплексных числа, если модуль суммы этих чисел равен: 1) сумме модулей их? 2) разности модулей?

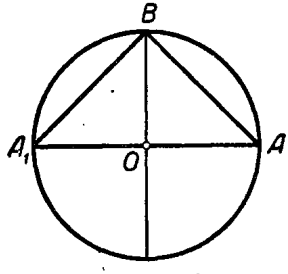
51. Как геометрически найти: 1) разность двух комплексных чисел? 2) сумму нескольких комплексных чисел?

52. Найти модуль частного от деления любого, отличного от 0, комплексного числа на сопряженное ему. [1].

53. В чем ошибка в каждом из следующих рассуждений: 1) $\frac{1}{-1}=\frac{-1}{1}$, $\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}}=\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{1}}$, $\frac{1}{i}=\frac{i}{1}$, $i^2=1$;

2) $i^2=\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}=\sqrt{(-1)\cdot(-1)}=\sqrt{1}=\pm 1$;

3) $3=\sqrt{9}=\sqrt{(-9)\cdot(-1)}=\sqrt{-9}\cdot\sqrt{-1}=3i\cdot i=-3$;



Черт. 8.

4) взят круг радиуса 1 (черт. 8). Точка O — начало отсчета. Положительными считаются направления вправо и вверх. Треугольник AA_1B — прямоугольный, поэтому на основании известной теоремы о перпендикуляре, опущенном из вершины прямого угла на гипотенузу, получаем:
$OB^2=AO\cdot A_1O=(1)\cdot(-1)=-1$,
$OB=\sqrt{-1}=i$;

5) $OA^2+OB^2=AB^2$, $1^2+i^2=AB^2$, $1-1=AB^2$, $AB=0$.

[1) $\sqrt{1}=\pm 1$; $\sqrt{-1}=\pm i$; $\frac{1}{i}=\frac{i}{-1}$ дает верный ответ $-1=i^2$;

3) $\sqrt{-9}\cdot\sqrt{-1} = (\pm 3i)\cdot(\pm i) = \pm 3$;

5) $OB \neq i$; $OB = 1$; OB — длина отрезка].

54. Найти модуль и аргумент числа и представить это число в тригонометрической форме: 1) 7; 2) -7; 3) $7i$; 4) $-7i$; 5) $1+i$; 6) $-1-i$; 7) 0; 8) $1-i\sqrt{3}$; 9) $\sqrt{3}+i$; 10) $-\sqrt{3}+i$; 11) $-2+2i$; 12) $-2\sqrt{3}-2i$.

[5) $\sqrt{2}$, $\frac{\pi}{4}$; 6) $\sqrt{2}$, $-\frac{3\pi}{4}$; 8) 2, $-\frac{\pi}{3}$; 9) 2, $\frac{\pi}{6}$;

10) 2, $\frac{5\pi}{6}$; 11) $2\sqrt{2}$, $\frac{3\pi}{4}$; 12) 4, $-\frac{5\pi}{6}$].

55. Какой аргумент имеет: 1) положительное действительное число? 2) отрицательное? 3) чисто мнимое?

[1) 0; 2) π; 3) $\pm\frac{\pi}{2}$].

56. Какое число не имеет определенного аргумента? [0].

57. Где на комплексной плоскости располагаются точки, изображающие числа: 1) модули которых равны 1? 3? 2) аргументы которых равны 60°, $-30°$, $-90°$, 135°, π, $\frac{2}{3}\pi$, $-\frac{\pi}{4}$?

58. Найти модуль и аргумент числа: 1) противоположного числу $1-i$; 2) сопряженного этому числу; 3) обратного ему.

[1) $\sqrt{2}$, 135°; 2) $\sqrt{2}$, 45°; 3) $\frac{1}{\sqrt{2}}$, 45°].

59. Сравнить модули и аргументы двух чисел: 1) взаимно сопряженных; 2) противоположных друг другу; 3) взаимно обратных.

60. Найти на комплексной плоскости геометрическое место точек, изображающих все комплексные числа: 1) имеющие модуль 5; 2) имеющие аргумент $\frac{\pi}{5}$; 3) аргумент которых больше $\frac{\pi}{4}$, но меньше $\frac{\pi}{2}$; 4) модуль которых больше 1, но меньше 2.

[1) окружность с центром в начале координат и радиусом, равным 5; 3) множество точек, лежащих между двумя лучами, образующими с положительным направлением действительной оси углы $\frac{\pi}{4}$ и $\frac{\pi}{2}$].

61. Представить в алгебраической форме комплексные числа: 1) $\cos 60° + i \sin 60°$; 2) $\cos 120° + i \sin 120°$; 3) $\cos 240° + i \sin 240°$.

62. Какие знаки имеют числа a и b, если аргумент комплексного числа $a + bi$ удовлетворяет условию: 1) $\varphi = 0$? 2) $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$? 3) $0 > \varphi > -\frac{\pi}{2}$; 4) $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

[1) $a > 0$, $b = 0$; 2) $a > 0$, $b > 0$; 3) $a > 0$, $b < 0$; 4) $a = 0$, $b > 0$].

63. Известно, что для комплексного числа $a + bi$, $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}$. Почему перед корнем, выражающим модуль, не поставлены два знака $+$ и $-$?

64. Комплексное число $a + bi$ изображается точкой, расположенной внутри квадрата, центр которого совпадает с началом координат, а стороны параллельны осям координат. 1) Что можно сказать о числах a и b? 2) Что можно сказать о модуле ρ этого числа, если сторона квадрата равна 2? $[0 \leqslant \rho \leqslant \sqrt{2}]$.

65. На комплексной плоскости дана окружность, с центром в начале координат и радиусом, равным 5. При каком условии точка, изображающая комплексное число $\rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ будет лежать: 1) внутри круга? 2) на окружности? 3) вне круга?

66. Как располагаются точки, изображающие комплексные числа, если модули этих чисел одинаковы, а аргументы их таковы: 1) 120°, 240°, 360°? 2) 30°, 120°, 210°, 300°? 3) 0°, 72°, 144°, 216°, 288°? Выразить эти комплексные числа в тригонометрической форме, приняв $\rho = 1$. Показать, что сумма этих чисел равна 0.

§ 2. Понятия кольца и поля *

67. Множество чисел называется замкнутым относительно какого-либо действия, если результат этого действия над любыми двумя числами из данного множества есть число этого же множества. Замкнуто или нет множество нечетных чисел относительно: а) сложения? б) умножения?

[а) Да, б) нет, так как сумма двух нечетных чисел не является нечетным числом, произведение нечетных чисел есть нечетное число].

68. Установить, замкнуты или нет множества: 1) натуральных чисел, 2) четных чисел, 3) рациональных чисел, 4) иррациональных чисел, 5) действительных чисел, 6) комплексных чисел, относительно сложения, вычитания, умножения, деления. В случае незамкнутости

множества относительно какой-либо из указанных операций привести примеры, подтверждающие вывод.

[1) замкнуто только относительно сложения и умножения; 4) не замкнуто относительно любого из указанных действий].

[illegible]нуто или нет множество всех многочленов $a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_n$ (где a_1, a_2, a_3, $\ldots a_n$ — любые рациональные числа, n — любое неотрицательное целое число), относительно операций: 1) сложения? 2) вычитания? 3) умножения? 4) деления?

[Замкнуто относительно первых трех операций].

70. Замкнуто или нет множество всех рациональных дробей вида $\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+b_2x^{m-2}+\ldots+b_m}$ (где a_0, a_1, a_2, $\ldots$, a_n, b_0, b_1, b_2, $\ldots$, b_m — любые действительные числа, а n и m — любые неотрицательные целые числа), относительно: сложения? вычитания? умножения? деления?

[Замкнуто относительно всех этих действий, если исключить деление на нуль].

71. Числовым кольцом называется множество чисел, замкнутое относительно сложения и умножения, если эти действия обладают следующими свойствами: 1) переместительным, 2) сочетательным, 3) распределительным свойством умножения, и если в этом множестве всегда выполнимо действие вычитания. Показать, что множество целых чисел образует кольцо.

72. Образует ли кольцо: 1) множество четных чисел? 2) множество нечетных чисел? 3) множество всех целых чисел, кратных 5? 4) множество действительных чисел? 5) множество комплексных чисел? 6) множество положительных действительных чисел? Обосновать ответы.

[1), 3), 4), 5) — кольца].

73. Почему всякое числовое кольцо обязано содержать число 0?

[Должно быть выполнимо вычитание $a-a$].

74. Почему для каждого числа, входящего в числовое кольцо, в этом кольце должно найтись противоположное число?

[Должно быть выполнено вычитание $0-a$].

75. Почему числовое кольцо должно содержать все числа, кратные любому, входящему в это кольцо числу?

[Должны быть выполнимы действия: $a+a+a+\ldots+a=na$ и $0-a-a-a-\ldots-a=-na$].

76. Обязательно ли числовое кольцо должно содержать единицу? Привести пример числового кольца, не содержащего единицы?

[Не обязательно, например, кольцо четных чисел].

77. Образуют ли кольцо всевозможные многочлены от x: $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$, где a_0, a_1, $\ldots$, a_n — произвольные действительные числа и n — неотрицательное целое число? [Да].

78. Является ли кольцом множество всех рациональных дробей от x: $\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m}$, где $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$, b_0, $b_1 \ldots b_m$ — произвольные рациональные числа, m, n — любые целые неотрицательные числа и знаменатель отличен от нуля? (Да).

79. Числовым полем называется числовое кольцо, в котором всегда выполнимо действие деления за исключением, конечно, деления на нуль. Показать, что множество рациональных чисел образует поле.

80. Образует ли поле каждое из следующих множеств: 1) множество целых чисел? 2) множество четных чисел? 3) действительных чисел? 4) комплексных чисел? 5) множество всех многочленов от x с рациональными коэффициентами? 6) множество всех рациональных дробей от x с действительными коэффициентами? [3), 4), 6) — поля].

81. Всякое ли числовое поле содержит единицу?

[Да, так как деление $a : a$ должно быть выполнимо].

82. Почему для всякого числа, отличного от 0, в числовом поле, содержащем это число, обязательно найдется обратное число?

[Должно быть выполнимо деление $1 : a$].

ГЛАВА XIII. УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ СТЕПЕНЕЙ И НЕРАВЕНСТВА

Указания

1. В § 4 «Делимость многочленов» отмечены звездочкой упражнения 96—105, в которых говорится о «многочленах, приводимых в данном поле». Все вводимые термины выясняются.

2. В § 5 данной главы «Алгебраические уравнения» рассматриваются уравнения двучленные, квадратные — с мнимыми корнями, биквадратные (первые сведения о которых даны в главе IV), некоторые трехчленные уравнения и др.

§ 1. Равносильные уравнения и неравенства

1. Равносильны ли уравнения: 1) $x-2=0$ и $(x-2)(x+2)=4(x+2)$? 2) $3x-2=x$ и $3x-2+\frac{1}{x-1}=x+\frac{1}{x-1}$? 3) $(x+2)(x-1)=4(x-1)$ и $x+2=4$? 4) $x=3$ и $x^2=9$? 5) $x^2-4x+4=16$ и $x-2=4$? 6) $(x-4)(x-1)(x+1)=0$ и $(x-4)(x-1)^2=0$?

[Во всех случаях уравнения не равносильны].

2. В каком случае после прибавления к обеим частям уравнения одного и того же алгебраического выражения получится уравнение, не равносильное данному? Привести пример.

[Если это выражение теряет смысл при подстановке в него какого-либо корня данного уравнения].

3. Обе части уравнения $x^2-1=x-1$ умножили на $\frac{1}{x-1}$. Получилось уравнение $x+1=1$. Какие корни имеют данное и получившееся уравнения? [Корни данного уравнения: 1 и 0, корень получившегося уравнения 0].

4. В каком случае при умножении обеих частей данного уравнения на выражение, содержащее неизвестное, может произойти потеря корней?

[При умножении обеих частей уравнения на выражение, содержащее неизвестное в знаменателе].

5. Для решения уравнения $f(x) = g(x)$ возвели обе части его в квадрат. Получили посторонний корень x. Какому уравнению принадлежит этот корень? [$f(x) = -g(x)$].

6. После возведения обеих частей уравнения $x - 1 = \sqrt{x+5}$ в квадрат нашли $x_1 = 4$, $x_2 = -1$. Какой из этих корней посторонний и какому уравнению он принадлежит? [$x_2 = -1$, $x - 1 = -\sqrt{x+5}$].

7. Уравнение имеет вид $\frac{f(x)}{g(x)} = 0$, где $f(x)$ и $g(x)$ многочлены. В каком случае число x_1, являющееся корнем уравнения $f(x) = 0$, будет корнем данного уравнения? [Если $g(x_1) \neq 0$].

8. Найти корень функции $y = \frac{x^2 - 9x + 20}{x-5}$. [$x = 4$].

9. Для решения уравнения $f(x) = g(x)$ из обеих частей его извлекают квадратный корень. Как следует поступить, чтобы при этом не потерять корней?

[Надо найти корни уравнений $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$ и $\sqrt{f(x)} = -\sqrt{g(x)}$].

10. Решить уравнение: $(x+a)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. [$b$; $-2a-b$].

11. Левая часть уравнения имеет вид произведения нескольких множителей, содержащих неизвестное, а правая часть этого уравнения 0. Для решения этого уравнения каждый множитель левой части приравняли 0 и решили получившиеся уравнения. Почему нельзя утверждать, что все найденные таким образом значения неизвестного будут корнями данного уравнения? Привести пример.

[При некоторых из найденных значений неизвестного отдельные множители левой части данного уравнения могут потерять смысл. Такие значения неизвестного не будут корнями данного уравнения.

Например: $(x-3)\left(\frac{1}{2x-6} + 5\right) = 0$, $x \neq 3$].

12. Будут ли равносильны два неравенства:
1) $-2x + 5 > 0$ и $2x - 5 < 0$? 2) $4x - 5 < 0$ и $4x > 5$?
3) $-3x^2 + 5x - 7 > 0$ и $3x^2 - 5x + 7 < 0$?

[1) и 3) — равносильны].

13. Имеется неравенство: $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$, где a, b, c, d — действительные числа, $b \neq d \neq 0$. Показать равносильность данного неравенства и неравенства $bd\,(ad - bc) > 0$.

[Обе части данного неравенства следует умножить на $b^2d^2 > 0$].

14. Привести к целому виду неравенстзо $\frac{x-a}{a} + \frac{x+a}{b} > 0$, где a и b — действительные числа.

[$ab\,[b\,(x-a) + a\,(x+a)] > 0$].

15. Показать равносильность следующих неравенств:

1) $x + 1 > 0$ и $(4x^2 + 12x + 9)\,(x + 1) > 0$;

2) $-3\,(a+b)^2\,(2x + 5) > 0$ и $2x + 5 < 0$;

3) $(x^2 - 4x + 5)\,(x - 2) < 0$ и $x - 2 < 0$;

4) $(x-1)\,(x+2)\,(x^2 + x + 1) < 0$ и $(x-1)\,(x+2) < 0$.

[3) $x^2 - 4x + 5 = (x-2)^2 + 1 > 0$; 4) $x^2 + x + 1 > 0$].

16. Пусть $a > 0$ и $b > 0$. 1) Доказать, что если $a > b$, то $a^2 > b^2$. 2) Доказать обратную теорему.

[1) $a^2 - b^2 = (a-b)\,(a+b) > 0$].

17. Доказать равносильность неравенств $a > b$ и $a^2 < b^2$ при $a < 0$ и $b < 0$.

18. Объяснить, почему: 1) из условия $7 > 5$ следует $7^n > 5^n$, 2) из условия $-7 < -5$ следует $(-7)^{2n} > (-5)^{2n}$ и $(-7)^{2n+1} < (-5)^{2n+1}$, где n — натуральное число.

19. Какой знак неравенства следует поставить между числами: 1) $(5)^3$ и $(-5)^3$? 2) $(5)^5$ и $(-3)^5$? 3) -4^4 и $(-4)^4$?

20. Доказать, что неравенство $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$ равносильно неравенству $f(x) \cdot g(x) > 0$, где $f(x)$ и $g(x)$ — целые рациональные функции.

21. Какое неравенство, равносильное неравенству: 1) $\frac{(x+3)^3\,(x-1)\,(x-2)^2}{(x-3)^2\,(x-4)} > 0$; 2) $\frac{x^2\,(x+1)^2\,(x-1)}{(x+2)^2\,(x-2)} < 0$, надо решить для нахождения решений данного неравенства? Могут ли содержаться числа 3, 4 среди решений первого из этих неравенств и числа 2, -2 среди решений второго неравенства?

§ 2. Исследование уравнений первой и второй степеней

22. Уравнение первой степени с одним неизвестным может быть приведено к виду $ax + b = 0$. В каком случае это уравнение имеет положительный корень, отрицательный, равный 0? Какие еще случаи могут иметь место? [Всего пять случаев].

23. Всегда ли положительный корень уравнения, составленного по условиям задачи, дает ответ на вопрос задачи? Привести примеры, поясняющие ответ на этот вопрос.

24. Имеется задача. Сумма цифр искомого двузначного числа 16. Если прибавить к нему 50, то получится обращенное число. Найти искомое число. Почему заранее можно сказать, что положительное решение уравнения, составленного по условиям этой задачи, не дает ответа на вопрос ее?

[Первому условию задачи удовлетворяют только три числа: 79, 88, 97. Если к каждому из них прибавить 50, то получится не двузначное, а трехзначное число].

25. Решить уравнение: 1) $3x - 4 = 5 + 3x$; 2) $2(x-2) = 2x - 4$.

[1) Нет корней; 2) любое, действительное или мнимое число является корнем].

26. Решить уравнение $n(x + a) = x + b$. Рассмотреть случаи: 1) $n \neq 1$; 2) $n = 1$, $a \neq b$; 3) $n = 1$, $a = b$.

[1) $x = \frac{b - na}{n - 1}$ $(n \neq 1)$, 2) корней нет; 3) любое число — корень].

27. Решить уравнение $ax + b = cx + d$. При каких значениях a, b, c и d это уравнение: 1) не имеет корней? 2) обращается в тождество?

[1) $a = c$, $b \neq d$; 2) $a = c$, $b = d$].

28. Решить уравнение $(x + m)^2 = (x + n)^2$. Рассмотреть случаи: 1) $m \neq n$; 2) $m = n$.

[1) $x = -\frac{m + n}{2}$; 2) x — любое число].

29. Исследовать, какие корни при каких значениях m имеют уравнения: 1) $\frac{x - 1}{x} = \frac{m}{2}$; 2) $3(x + 1) = 2mx + 1$.

30. Отцу a лет, сыну b лет. Когда отношение возраста отца к возрасту сына равно k? Составить уравнение для решения этой задачи. Какие значения может прини-

мать k? Каким должно быть отношение $\frac{a}{b}$, чтобы ответ на вопрос задачи был положительным числом? отрицательным? нулем?

$\left[x=\frac{a-kb}{k-1},\ k>1;\ x>0,\ \text{если}\ \frac{a}{b}>k;\ x<0,\ \text{если}\ \frac{a}{b}<k;\ \text{и}\ x=0,\ \text{если}\ \frac{a}{b}=k\right]$.

31. Какая из предложенных систем уравнений: 1) не имеет решений? 2) имеет бесконечно много решений?

1) $\begin{cases} x-3y=9, \\ 2x-3y=9; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x-2y=7, \\ 2x-4y=7; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x-2y=7, \\ 2x-4y=14. \end{cases}$

32. При каких значениях x дробь $\frac{x^2-2mx+m^2-n}{mx^2-nx+p}$ равна 0?

[$x=m\pm\sqrt{n},\ n\geqslant 0$. Знаменатель дроби при этих значениях x должен быть отличен от 0].

33. Доказать, что корни квадратного уравнения $x^2-2ax+a^2-b^2-c^2=0$ (a, b, c — любые действительные числа) действительны.

[$a^2-a^2+b^2+c^2\geqslant 0$].

34. Указать условия, которым должны удовлетворять коэффициенты уравнения $x^2-2ax+b^2=0$, чтобы: 1) корни уравнения были действительными числами; 2) равными действительными числами; 3) мнимыми числами.

[1) $a^2\geqslant b^2$ или $|a|\geqslant|b|$; 2) $|a|=|b|$; 3) $|a|<|b|$].

35. Доказать, что мнимые корни квадратного уравнения с действительными коэффициентами — всегда сопряженные друг другу числа.

36. Почему уравнение $ax^2+bx+c=0$, где $a>0$, $c<0$, не может иметь мнимых корней?

37. Показать, что: 1) уравнение $x^2-6x+12=0$ не имеет корней в поле действительных чисел; 2) уравнение $x^2-4x-6=0$ не имеет корней в поле рациональных чисел.

38. Каким должно быть число d, чтобы уравнение $4x^2-8x+d=0$ имело: 1) мнимые корни? 2) равные действительные корни? 3) положительные корни (оба)? 4) отрицательные корни (оба)? 5) действительные корни разных знаков?

[1) $d > 4$; 2) $d = 4$; 3) $0 < d < 4$; 4) оба корня не могут быть отрицательными, так как сумма корней равна 2; 5) $d < 0$].

39. Доказать, что корни уравнения $x^2 - (m + n)x + (mn - p^2) = 0$ — действительные и вообще различные числа. Найти условие, при котором корни этого уравнения будут равны.

[$(m - n)^2 + 4p^2 > 0$, корни равны при $m = n$, $p = 0$].

40. Найти k, если корни уравнения $4x^2 - (k - 4)x + 1 = 0$ равны между собой. [$k_1 = 0$, $k_2 = 8$].

41. При каких значениях a уравнение $x + \frac{1}{x} = a$ имеет действительные корни? [$|a| \geqslant 2$].

42. Как будут изменяться корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, если c будет неограниченно приближаться к 0, при постоянных, отличных от 0, a и b?

[Один корень будет приближаться к 0, а второй к $-\frac{b}{a}$].

§ 3. Трехчлены и неравенства второй степени

43. Дан квадратный трехчлен $y = ax^2 + bx + c$, где a, b и c — действительные числа, отличные от нуля. Установить область определения квадратного трехчлена.

[Множество всех действительных чисел].

44. Найти значения аргумента x, для которых квадратный трехчлен $x^2 - 2x - 8$ равен: 1) 16; 2) -9; 3) -10.

[1) 6; -4; 2) 1; 3) действительных значений нет].

45. Представить в виде произведения трехчлен $y = ax^2 + bx + c$, если корни его x_1 и x_2.

[$y = a(x - x_1)(x - x_2)$].

46. При каких значениях x трехчлен: 1) $y = 2x^2 - 10x + 12$; 2) $y = -2x^2 + 10x - 12$ имеет положительные значения? отрицательные? значение 0?

[1) $y > 0$ при $x > 3$ и $x < 2$; $y < 0$ при $2 < x < 3$; $y = 0$ при $x = 2$ и $x = 3$].

47. В каком случае трехчлен $ax^2 + bx + c$ принимает и положительные, и отрицательные, и нулевое значения?

[$b^2 - 4ac > 0$].

48. Как на координатной плоскости располагается график трехчлена $y = ax^2 + bx + c$ (парабола), имеющего

действительные корни, если: 1) $a > 0$? 2) $a < 0$? Имеет ли график точки пересечения с осью x? Сколько? Как направлены ветви параболы?

49. Даны трехчлены:

$$1)\ y = 4x^2 - 8x + 4;$$
$$2)\ y = -4x^2 + 8x - 4.$$

В какой точке график каждого из этих трехчленов касается оси x? Могут ли данные трехчлены принимать положительные значения, отрицательные и при каких значениях x? Как проходят графики данных трехчленов?

50. Даны трехчлены:

$$1)\ y = 2x^2 - 2x + 2;$$
$$2)\ y = -2x^2 + 2x - 2.$$

Представить данные трехчлены в каноническом виде. Что можно сказать о корнях данных трехчленов? Какие значения принимают эти трехчлены при изменении x от $-\infty$ до 0 и от 0 до ∞? Как располагаются на плоскости графики данных трехчленов?

Указание. См. упражнение 65.

$$[1)\ y = 2\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right],\quad y > 0;$$
$$2)\ y = -2\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right],\ y < 0].$$

51. В каком случае трехчлен $ax^2 + bx + c$, где a, b и c — действительные числа, заведомо не может обратиться в нуль? $[b^2 - 4ac < 0]$.

52. В каких случаях трехчлен $ax^2 + bx + c$ может принимать только положительные или только отрицательные значения? $[b^2 - 4ac < 0]$.

53. В каком случае трехчлен $ax^2 + bx + c$ при любых значениях x: 1) положителен? 2) отрицателен? Привести примеры.

$$[1)\ b^2 - 4ac < 0,\ a > 0;\ 2)\ b^2 - 4ac < 0,\ a < 0].$$

54. Исследовать трехчлены:

1) $y = 5x^2 - 6x + 1$;
2) $y = -5x^2 + 6x - 1$;
3) $y = 3x^2 - 6x + 3$;
4) $y = -3x^2 + 6x - 3$;
5) $y = 4x^2 - 16x + 7$;
6) $y = -4x^2 + 16x - 7$.

55. Как графически решить уравнения:

1) $x^2 - 7x + 12 = 0$?
2) $x^2 - 6x - 7 = 0$?
3) $8x^2 - 6x + 1 = 0$?

[1) Следует построить график квадратного трехчлена $x^2 - 7x + 12$ и найти абсциссы точек пересечения его с осью x или построить на одном чертеже графики функций $y = x^2$ и $y = 7x - 12$ и найти абсциссы точек пересечения их].

56. Решить неравенства: 1) $-x^2 + 6x - 8 < 0$;
2) $-x^2 + 3x - 2 > 0$; 3) $-x^2 + 3x + 10 < 0$;
4) $x^2 - 6x + 9 > 0$; 5) $x^2 - 6x + 9 < 0$.

[1) $x > 4$, $x < 2$; 2) $1 < x < 2$; 3) $x > 5$, $x < -2$; 4) любое число, кроме 3; 5) нет решений].

57. Почему неравенство $9x^2 - 5x + 10 < 0$ не имеет решений? Как располагается на плоскости график трехчлена $9x^2 - 5x + 10$?

58. Найти значение k так, чтобы неравенство $kx^2 - -kx + 1 > 0$ выполнялось при любых значениях x.

[$k^2 - 4k < 0$, $0 < k < 4$].

59. Решить неравенство: $\frac{3x+5}{x-1} > \frac{2x+7}{x-1}$.

[$x > 2$, $x < 1$].

60. Какие значения x удовлетворяют неравенству $|x| < 3$? [$-3 < x < 3$].

61. При решении неравенства $x^2 - 2 < 0$ получили $|x| < \sqrt{2}$. Как следует понимать полученный результат?

[$-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$].

62. Решить неравенство: 1) $|x - 1| < 3$; 2) $|3 - x| \leqslant 5$.

63. Решить неравенство: $(x + 2)(x + 3) > (x + 2)^2$. Можно ли сократить обе части этого неравенства на $x + 2$?

[$x > -2$, сократить на $x + 2$ нельзя].

64. Решить неравенства: 1) $2^{-x} > 32$; 2) $\log_2 x < 5$; 3) $3 < 3^{-x} < 27$; 4) $-2 < \log_2 x < 4$.

[1) $x < -5$; 2) $x < 32$; 3) $-3 < x < -1$; 4) $\frac{1}{4} < x < 16$].

65. Известно, что всякий трехчлен $ax^2 + bx + c$ можно представить в каноническом виде $a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$. 1) При каком значении x выражение, заключенное в квадратные скобки, будет наименьшим? 2) Наибольшее или наименьшее значение принимает квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ при $x = -\frac{b}{2a}$, если: а) $a > 0$? б) $a < 0$?

[1) $x = -\frac{b}{2a}$; 2) а) наименьшее, б) наибольшее].

66. Наибольшее или наименьшее значения квадратного трехчлена называются экстремальными значениями. При каких значениях x трехчлены: 1) $x^2 - 6x + 8$; 2) $-x^2 - 2x + 8$; 3) $x^2 - 4x + 4$; 4) $2x^2 + 8x - 1$ принимают экстремальные значения? Найти эти значения. В каких точках графики этих трехчленов пересекаются с осью x?

[1) При $x = 3$ трехчлен принимает наименьшее значение, равное -1, искомые точки: $(2, 0)$, $(4, 0)$; 2) при $x = -1$ наибольшее значение, равное 9, $(-4, 0)$, $(2, 0)$].

67. Найти наибольшее значение функции $y = \frac{1}{1 + x^2}$.

68. Может ли функция $y = \frac{x^2 + 1}{x}$ при некотором значении аргумента x принять значение 0 и вообще целое значение? Может ли эта функция принимать значения: 1) меньше 1? 2) по абсолютной величине меньше 1?

69. Установить область определения функции:

1) $y = \frac{x - \sqrt{3}}{x + 2}$; 2) $y = \sqrt{x - 3} + \sqrt{x + 1} + \sqrt{x - 2}$;

3) $y = \sqrt{x^2 - 4}$; 4) $y = \sqrt{9 - x^2}$; 5) $y = \sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{16 - x^2}$; 6) $y = \sqrt{2^x - 8}$; 7) $y = x + \lg x$.

[1) $x \neq -2$; 2) $x \geqslant 3$; 3) $|x| \geqslant 2$; 4) $|x| \leqslant 3$; 5) $1 \leqslant |x| \leqslant 4$; 6) $x \geqslant 3$; 7) $x > 0$].

70. Почему в случае $a > 0$, $b > 0$ и $a \neq b$: 1) $a^2 + b^2 > 2ab$? 2) $2(a^2 + b^2) > (a + b)^2$? [$(a - b)^2 > 0$].

71. Доказать, что сумма взаимно обратных отношений двух неравных положительных чисел больше 2.

[Нужно доказать, что $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} > 2$ или $x^2 + y^2 > 2xy$].

72. Доказать, что если a, b, c — неравные положительные числа, то $a^2 + b^2 + c^2 > ab + ac + bc$.

[Следует просуммировать по частям неравенства: $a^2+b^2>2ab$, $b^2+c^2>2bc$, $c^2+a^2>2ac$].

73. Доказать, что полусумма двух положительных чисел a и b заключена между этими числами.

[Пусть $a>b$. Имеем $2a>a+b$, $a+b>2b$, или $2a>a+b>2b$, окончательно $b<\frac{a+b}{2}<a$].

74. Доказать, что среднее арифметическое двух положительных чисел a и b не меньше их среднего геометрического. В каком случае они равны? Дать геометрическое истолкование ответу.

§ 4. Делимость многочленов

75. Как выразить тождеством: 1) что многочлен $f(x)$ делится на многочлен $g(x)$? 2) что при делении многочлена $f(x)$ на многочлен $g(x)$ в частном получается многочлен $q(x)$, а в остатке многочлен $r(x)$?

76. Назвать делители двучлена: 1) x^2-4, 2) x^4-1.

[1) Любое, отличное от 0, число, любой двучлен вида: $a(x^2-4)$, $a(x-2)$, $a(x+2)$, где $a\neq 0$].

77. Почему при делении целой рациональной функции $a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_n$ на $x-a$ в частном получается целая рациональная функция, степени $n-1$, а в остатке постоянное число?

78. Найти остаток от деления многочлена:
1) x^3-4x^2+5 на $x-2$; 2) x^5+8x^2+3 на $x+2$.

79. Доказать, что: 1) трехчлен $2x^2+5x-3$ делится на $x+3$; 2) многочлен $3x^3-5x^2+4x-12$ делится на $x-2$; 3) $a^2-ab-2b^2$ делится на $a-2b$.

80. Каким должно быть число k, чтобы многочлен x^4-5x^2+4x-k делился на $x-1$? [$k=0$].

81. Как можно проверить, делится ли многочлен $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$ на произведение $(x-a)(x-b)$, если $a\neq b$?

82. Доказать, что: 1) многочлен x^3+4x^2+x-6 делится на $(x-1)(x+2)$; 2) многочлен $3x^3+5x^2-3x-5$ делится на x^2-1; 3) многочлен $x^4-2x^3+4x^2-13x+10$ делится на x^2-3x+2.

83. Не разлагая данные многочлены на множители и не производя деления, убедиться, что: 1) многочлен $8x^3-10x^2-x-3$ делится на $2x-3$; 2) многочлен $x^2-y^2-z^2-2yz$ делится на $x-y-z$.

84. Не производя деления, найти остаток от деления $4x^3-2x^2+2x-2$ на $2x-1$. [-1].

85. Найти корни многочленов: 1) x^2+x+1; 2) x^3-1; 3) $x^2-2x+ix-2i$; 4) $x^3-ix^2-9x+9i$.

$\left[1)\ \frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2};\ 2)\ 1, \frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2};\ 3)\ 2, -i;\ 4)\ 3, -3, i\right]$.

86. Найти корни функции $y=x^4-1$. [1, —1, i, $-i$].

87. Многочлен x^3-2x^2+x-2 имеет корень i. На какой квадратный двучлен делится этот многочлен?

88. Какой корень имеет всегда многочлен вида $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x$?

89. Известно, что многочлен $4x^3-bx^2+8x+20$ имеет корень 1. Определить b. [32].

90. В высшей алгебре доказывается, что многочлен $x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\ldots+p_n$ можно представить в виде произведения $(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$, где x_1, x_2, x_3, $\ldots$ x_n — корни этого многочлена. Воспользовавшись формулой произведения двучленов, имеющих один и тот же первый член, выразить через коэффициенты многочлена сумму и произведение всех корней его.

$[p_1=-(x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n),\ p_n=(-1)^n x_1x_2x_3\ldots x_n]$.

91. О функции $x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4$, где a_1, a_2, a_3, a_4 — действительные числа, известно, что все корни ее — мнимые числа. Пересекает ли график этой функции ось x? [Нет].

92. Найти корни многочленов: 1) $x^3-6x^2+11x-6$; 2) $x^4+5x^3+5x^2-5x-6$. Разложить данные многочлены на множители. Делителями какого числа являются целые корни первого уравнения (второго)?

[1) $(x-1)(x-2)(x-3)$. Корни этого уравнения являются делителями свободного члена его;

2) $(x-1)(x+1)(x+2)(x+3)$].

93. Корни многочлена x^3+px^2-x+q: $2, -3, -5$. Найти p и q. [$p=6$, $q=(-1)^3\cdot 30=-30$].

94. Составить уравнение, корнями которого были бы числа: -1; 3; 5. [$x^3-7x^2+7x+15=0$].

95. Даны два многочлена. Какие коэффициенты будут иметь сумма, разность и произведение данных многочленов, если коэффициенты этих многочленов: 1) целые числа? 2) четные? 3) рациональные? 4) действительные? 5) нечетные? 6) комплексные? 7) положительные целые числа?

[1) Целые числа; 2) четные; 3) рациональные; 4) действительные; 5) целые; 6) комплексные; 7) сумма и произведение имеют целые положительные коэффициенты, а разность может иметь и отрицательные целые коэффициенты].

96*. Многочлен с коэффициентами из некоторого числового поля называется приводимым в этом поле, если он может быть представлен в виде произведения многочленов с коэффициентами из этого поля (постоянные множители не принимаются во внимание). Показать приводимость двучлена $x^2 - 4$ в поле рациональных чисел.

$$\left[x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2) = \frac{1}{2}(x - 2)(2x + 4)\right].$$

97*. Показать, что двучлены: 1) $x^2 - 2$; 2) $4x^2 - 3$ не приводимы в поле рациональных чисел, но приводимы в поле действительных чисел.

98*. Может ли оказаться так, что один и тот же многочлен в одном числовом поле приводим, а в другом не приводим?

99*. Если многочлен приводим в поле рациональных чисел, то обязательно ли он будет приводимым в поле действительных чисел? Почему? Справедливо ли обратное утверждение? Пояснить ответ примерами.

100*. Ответить на такие же вопросы, как в № 99, относительно поля действительных чисел и поля комплексных чисел.

101*. Найти корни двучленов: 1) $x^2 + 1$; 2) $x^2 + 5$. В каких полях приводимы эти двучлены?

102*. Почему многочлен первой степени $ax + b$ не приводим в поле рациональных чисел? в поле действительных чисел? комплексных чисел?

103*. В каком случае трехчлен $y = ax^2 + bx + c$ с действительными коэффициентами: 1) приводим в поле действительных чисел? 2) не приводим? В каком числовом поле всегда приводим трехчлен второй степени?

[Если $b^2 - 4ac \geqslant 0$, трехчлен приводим, если $b^2 - 4ac < 0$ — не приводим; трехчлен второй степени всегда приводим в поле комплексных чисел].

104*. Известны два корня многочлена третьей степени с действительными коэффициентами: $x_1 = -3i$ и $x_2 = 4$. Почему этот многочлен приводим: 1) в поле комплексных чисел? 2) в поле действительных чисел? 3) в поле рациональных чисел?

105*. В каких полях приводимы многочлены: 1) x^2+1? 2) x^3+8? 3) x^3-27? 4) x^4+4? 5) x^4-9?

[3) приводим в поле комплексных чисел, в поле действительных чисел и в поле рациональных чисел].

§ 5. Алгебраические уравнения

106. Решению какого двучленного уравнения равносильно нахождение всех значений корня:

1) $\sqrt[3]{1}$? 2) $\sqrt[3]{-1}$? 3) $\sqrt[4]{1}$? 4) $\sqrt[4]{-1}$? 5) $\sqrt[m]{1}$?

[2) $x^3+1=0$; 5) $x^m-1=0$].

107. Как решение двучленного уравнения вида $x^n \pm a = 0$ можно свести к решению уравнения вида $y^n \pm 1 = 0$? [$x=y\sqrt[n]{a}$].

108. При каком условии двучленное уравнение $ax^4+b=0$ обязательно имеет положительное решение? [Если a и b разных знаков].

109. Решить уравнения: 1) $x^3 \pm 1 = 0$; 2) $x^4 \mp 1 = 0$.

[1) $x_1=-1$, $x_{2,3}=\frac{1}{2}\pm\frac{i\sqrt{3}}{2}$ и $x_1=1$, $x_{2,3}=-\frac{1}{2}\pm\frac{i\sqrt{3}}{2}$; 2) $x_{1,2}=\pm 1$, $x_{3,4}=\pm i$ и $x_{1,2}=\pm\sqrt{i}$, $x_{3,4}=\pm\sqrt{-i}$].

110. Разложить на множители: 1) x^3-1; 2) x^3+1; 3) x^4-1; 4) x^6-1.

111. Решить уравнение $x^6-729=0$.

[$x^6-3^6=(x-3)(x+3)(x^2-3x+9)(x^2+3x+9)$].

112*. Решить уравнения: 1) $(x+4i)(x-3i)=0$; 2) $x+y+ixy=8+15i$ (x и y — действительные числа); 3) $x^2-ix+2=0$; 4) $x^2-2ix+3=0$.

[2) 3 и 5, 5 и 3; 3) $2i$, $-i$; 4) $3i$, $-i$].

113. Составить квадратное уравнение с действительными коэффициентами, имеющее один корень, равный:

1) $-2i$; 2) $\sqrt{3}\,i$; 3) $1-i$; 4) $2-3i$; 5) $2+i\sqrt{3}$.

[1) $x^2+4=0$; 2) $x^2+3=0$; 5) $x^2-4x+7=0$].

114. Составить квадратное уравнение по его корням: 1) 3 и $4i$; 2) $1+i$ и $1-2i$?

[1) $x^2-(3+4i)x+12i=0$; 2) $x^2-(2-i)x+3-i=0$].

115*. Может ли квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$ с комплексными коэффициентами иметь два действительных корня?

116. Уравнение $y^2 + py + q = 0$ называется резольвентой биквадратного уравнения $x^4 + px^2 + q = 0$. Какая связь существует между корнями биквадратного уравнения и корнями его резольвенты? Какие выводы о корнях биквадратного уравнения могут быть сделаны из наличия этой связи?

[$x_{1,2} = \pm\sqrt{y_1}, x_{3,4} = \pm\sqrt{y_2}$. Каждому положительному корню резольвенты соответствуют два действительных противоположных корня биквадратного уравнения, каждому отрицательному корню резольвенты соответствуют два сопряженных (противоположных) мнимых корня уравнения, каждому мнимому корню резольвенты соответствуют два противоположных мнимых корня уравнения].

117. Если все корни биквадратного уравнения действительны, то сколько среди них различных по абсолютной величине?

[Вообще действительные корни биквадратного уравнения по абсолютной величине попарно равны].

118. В каком случае корни уравнения $ax^4 + bx^2 + c = 0$ попарно равны?

[Если резольвента этого уравнения имеет равные корни, т. е. если $b^2 = 4ac$].

119. Каким условиям должны удовлетворять коэффициенты p и q, чтобы уравнение $x^4 + px^2 + q = 0$ имело четыре действительных корня? [$p < 0, q > 0, p^2 - 4q \geqslant 0$].

120. Исследовать, какие корни (действительные или мнимые и в случае действительных корней положительные или отрицательные) имеют следующие уравнения:

1) $x^4 + 2x^2 - 15 = 0$; 2) $x^4 - 2x^2 + 15 = 0$; 3) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$.

[1) Два действительных корня противоположных знаков; 2) все корни мнимые].

121. Не решая биквадратное уравнение, найти сумму и произведение его корней: 1) $x^4 - 8x^2 + 15 = 0$; 2) $4x^4 - 17x^2 + 4 = 0$. [1) 0, 15; 2) 0, 1].

122. Составить биквадратное уравнение с действительными коэффициентами, если известны два его корня:

1) $2, -i$; 2) $3, i\sqrt{2}$; 3) $-4, 1 + i$; 4) $2 + 3i, -1 - i$.

[3] $(x-4)(x+4)[x-(1+i)][x-(1-i)]=0$, $(x^2-16)(x^2-2x+2)=0$].

123. Найти положительный корень уравнения: $\sqrt[3]{x}+5\sqrt[3]{x^2}=22$. [$x=8$].

124. Решить уравнение $x^2+\sqrt{x^2+1}=11$.

[$\sqrt{x^2+1}=y$, $x=\pm 2\sqrt{2}$].

125. Сколько корней имеет уравнение $x^6+4x^3-5=0$? Какие двучленные уравнения должны быть решены для нахождения корней данного уравнения? [Обозначив $x^3=y$, найдя y, получим два уравнения: $x^3-1=0$ и $x^3+5=0$].

126. Произведение четырех последовательных целых чисел равно 360. Найти эти числа.

[$x(x+1)(x+2)(x+3)=360$, $(x^2+3x)(x^2+3x+2)=360$, $x^2+3x=y$. Искомые числа: 3, 4, 5, 6 и -6, -5, -4, -3].

127. Как решить уравнение $(x^2-6x)^2-3(x^2-6x+10)+2=0$?

Указание. Надо воспользоваться подстановкой $x^2-6x=y$.

128. Как решить трехчленное уравнение $ax^{2n}+bx^n+c=0$, где n — натуральное число?

129*. Уравнение $a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-2}x^2+a_{n-1}x+a_n=0$, где $a_0=a_n$, $a_1=a_{n-1}$, $a_2=a_{n-2}$ и т. д., называется возвратным. Показать, что возвратное уравнение третьей, пятой, вообще нечетной степени имеет корень -1.

[Возвратное уравнение нечетной степени имеет в левой части четное число членов, а члены, равноудаленные от начала и конца левой части, при $x=-1$ — противоположные числа].

130. Почему все члены возвратного уравнения $x^4-3x^3+2x^2-3x+1=0$ для нахождения корней его можно разделить на x^2? [$x\neq 0$].

131*. Показать, что если возвратное уравнение четной степени имеет корень α, то оно имеет также корень $\frac{1}{\alpha}$.

[Для решения возвратного уравнения четной степени вводится новое неизвестное $z=x+\frac{1}{x}$. Это новое не-

известное при $x = a$ и $x = \frac{1}{a}$ имеет одно и то же значение].

132. Решить уравнения: 1) $x^2(x-1)^2 + x(x-1)^3 = 0$; 2) $(x-1)\lg x = 0$; 3) $\frac{(x+3)(x^2+2)}{x^2-9} = 0$.

[1) 0, 1, 1, -1; 2) 1; 3) $\pm\sqrt{2}i$].

133. Найти корни уравнений: 1) $\frac{4}{x-3} = 0$; 2) $\frac{x-2}{(x-2)^2} = 0$; 3) $\frac{x-3}{2x-5} = 0$; 4) $\frac{(x-3)^2}{x-3} = 0$; 5) $\frac{(x-8)(x-2)}{(x-2)(x+2)} = 0$; 6) $x(x-3) = 4(x-3)$; 7) $(x+4)\sqrt{x} = 0$ во множестве действительных чисел; 8) $(x+2)\lg x = 0$ во множестве действительных чисел; 9) $(x^2-1)\cdot\frac{1}{(x-1)^2} = 0$.

[1); 2); 4) — не имеют корней; 3) 3; 5) 8; 6) 3 и 4; 7) 0; 8) 1; 9) -1].

134. Найти корни уравнений (во множестве комплексных чисел): 1) $3x-5 = 3(x-2)$; 2) $x^2 = 4$; 3) $[x] = x$, где $[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x; 4) $[x] = 0$; 5) $|x| = x$; 6) $|x|^2 = x^2$; 7) $2x-6 = 2(x-3)$; 8) $\sqrt{2x-3} - \sqrt{2x+4} = 0$; 9) $(x+1)^2 + (x-1)^2 = 2(x^2+1)$.

[1); 8) нет; 3) все целые числа; 4) 0 и все действительные числа, заключенные между 0 и 1; 5) число 0 и все положительные действительные числа; 6) все действительные числа; 7 и 9) — все комплексные числа].

135. Найти корни уравнения: 1) $3x+5 = 4x+8$ во множестве натуральных чисел; 2) $(x+4)(2x-3) = 0$ во множестве целых чисел; 3) $5x-6 = 3x+1$ во множестве целых чисел; 4) $(x^2-3)(x+2)\left(x-\frac{1}{2}\right) = 0$ во множестве рациональных чисел; 5) $x^2+9 = 0$ во множестве действительных чисел; 6) $(x-5)(x+0{,}5)(x^2+3) = 0$ во множестве комплексных чисел.

[1); 3) и 5) нет; 2) -4; 4) $-2, \frac{1}{2}$; 6) $5, -0{,}5, i\sqrt{3}, -i\sqrt{3}$].

136. Найти корни уравнения $(x+2)(2x-1)(x^2+1)(x^2-2) = 0$: 1) во множестве натуральных чисел; 2) во множестве целых чисел; 3) во

множестве рациональных чисел; 4) во множестве действительных чисел; 5) во множестве комплексных чисел.

[1) нет; 2) -2; 3) $-2, \frac{1}{2}$; 4) $-2, \frac{1}{2}, \sqrt{2}, -\sqrt{2}$; 5) $-2, \frac{1}{2}, \sqrt{2}, -\sqrt{2}, i, -i$].

137. Составить уравнение: 1) имеющее корни во множестве рациональных чисел, но не имеющее корней во множестве целых чисел; 2) имеющее корни во множестве комплексных чисел, но не имеющее корней во множестве действительных чисел; 3) имеющее корни во множестве рациональных чисел, но не имеющее корней во множестве действительных чисел? [3) — невозможный случай].

138. Будут ли равносильны уравнения: $x+3=10-x$ и $x+3+\sqrt{x}=10-x+\sqrt{x}$ в поле действительных чисел? [Да].

139. Почему не будут равносильны уравнения $x+5=15-x$ и $x+5+\sqrt{2-x}=15-x+\sqrt{2-x}$ в поле действительных чисел?

[Число 5 не является корнем второго уравнения в поле действительных чисел].

140. Решить систему уравнений $\begin{cases} x^2-3x+2=0, \\ x+2=3. \end{cases}$

[$x=1$].

141. Если алгебраическое уравнение $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n=0$ имеет корень 1, то чему равна сумма коэффициентов этого уравнения? [0].

142. Если алгебраическое уравнение $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n=0$ имеет корень -1, то какая связь существует между коэффициентами членов с четными степенями неизвестного и коэффициентами членов с нечетными степенями неизвестного?

143*. В высшей алгебре доказывается, что если алгебраическое уравнение с действительными коэффициентами $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n=0$ имеет корень $a+bi$, то это уравнение имеет также корень $a-bi$. Известны два корня уравнения третьей степени $x^3-10x^2+37x-52=0$ $x_1=4$ и $x_2=3-2i$. Найти третий корень этого уравнения, не производя никаких вычислений.

144. Пусть некоторое алгебраическое уравнение с действительными коэффициентами имеет корень $a+bi$.

1) Какие два множителя обязательно будет содержать левая часть этого уравнения, если ее разложить на мно-

жители по корням (правая часть уравнения предполагается равной 0)? 2) Каким одним множителем можно заменить эти два множителя?

[1) $x-(a+bi)$, $x-(a-bi)$; 2) $x^2-2ax+a^2+b^2$].

145. Почему уравнение $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n=0$ нечетной степени с действительными коэффициентами имеет по крайней мере один действительный корень?

[Число мнимых корней, если они есть, в этом случае обязательно четно].

146*. Как найти все корни уравнения $x^4-4x^3+9x^2+16x-52=0$, если известен один из этих корней $2-3i$?

147. Составить уравнение (возможно более низкой степени), имеющее следующие корни: -3, 2, -2, 3.

148. Составить алгебраическое уравнение с действительными коэффициентами (возможно более низкой степени), имеющее: 1) корень $2+i$; 2) корни 2, $3-i$; 3) $1+\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$; 4) $1+i$, $2+i$.

[1) $x^2-4x+5=0$; 2) $(x-2)(x^2-6x+10)=0$; 3) $x^2-(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})x+\sqrt{3}(1+\sqrt{2})=0$; 4) $(x^2-2x+2)(x^2-4x+5)=0$].

149. Почему нельзя составить такое уравнение третьей степени, с действительными коэффициентами, чтобы все его три корня были мнимыми числами?

150. Сколько мнимых корней может иметь алгебраическое уравнение пятой степени с действительными коэффициентами?

[Четыре или два или ни одного].

151. Действительное или мнимое число называется алгебраическим, если оно является корнем какого-либо алгебраического уравнения с целыми коэффициентами. Все остальные комплексные числа называются трансцендентными. Трансцендентными, например, являются числа: e и π, а также всякое алгебраическое число, отличное от 0 и 1, возведенное в степень, показатель которой — любое алгебраическое иррациональное число, например $2^{\sqrt{2}}$, $3^{\sqrt{5}}$ и т. д. (доказал советский математик Гельфонд в 1936 г.). Показать, что числа: -5; $3\frac{1}{7}$; $-0{,}15$; $\sqrt{2}$; $\sqrt[3]{4}$; $-\sqrt[4]{5}$; $2i$; $-7i$; $2-i$; $-1+2i$ являются алгебраическими числами.

[Надо составить алгебраические уравнения с целыми коэффициентами, корнями которых были бы данные числа].

ТРИГОНОМЕТРИЯ

§ 1. Тригонометрические функции острого угла

1. Как изменяются тригонометрические функции $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ при уменьшении угла от 90° до 0°?

2. Какие углы называются дополнительными? Привести примеры дополнительных углов. Найти дополнительный угол для угла, величина которого равна: 1) 40°; 2) 35°; 3) 68°; 4) 83°; 5) 15′; 6) 89°32′.

3. Представить в виде тригонометрических функций угла, меньше 45°: 1) $\sin 72°$; 2) $\cos 64°$; 3) $\operatorname{tg} 58°$; 4) $\operatorname{ctg} 48°$; 5) $\sin 89°30'$.

[1) $\cos 18°$; 2) $\sin 26°$; 3) $\operatorname{ctg} 32°$; 4) $\operatorname{tg} 42°$; 5) $\cos 30'$].

4. Доказать справедливость тождеств: 1) $\sin(45° - \alpha) = \cos(45° + \alpha)$; 2) $\sin(60° + \alpha) = \cos(30° - \alpha)$; 3) $\operatorname{tg}(25° + \alpha) = \operatorname{ctg}(65° - \alpha)$. [1) $(45° - \alpha) + (45° + \alpha) = 90°$.]

5. Какую величину может иметь острый угол α, если известно, что: 1) $\sin\alpha < \frac{1}{2}$? 2) $\sin\alpha > \frac{1}{2}$? 3) $\cos\alpha < \frac{1}{2}$? 4) $\cos\alpha > \frac{1}{2}$? 5) $\operatorname{tg}\alpha < 1$? 6) $\operatorname{tg}\alpha > 1$? 7) $\operatorname{ctg}\alpha > 1$? 8) $\operatorname{ctg}\alpha < 1$?

[1) $\alpha < 30°$; 2) $\alpha > 30°$; 3) $\alpha > 60°$; 4) $\alpha < 60°$; 5) $\alpha < 45°$; 6) $\alpha > 45°$; 7) $\alpha < 45°$; 8) $\alpha > 45°$].

6. Доказать справедливость следующих неравенств: 1) $\sin\alpha < \operatorname{tg}\alpha$, если α — острый угол; 2) $\cos\alpha < \operatorname{ctg}\alpha$, если α — острый угол.

$$\left[1)\ \sin\alpha < \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha};\ 2)\ \cos\alpha < \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right].$$

7. Каким должен быть острый угол α, чтобы: 1) синус и косинус его были равны? 2) тангенс и котангенс его были равны? [1) $\alpha = 45°$; 2) $\alpha = 45°$].

8. В прямоугольном треугольнике один из катетов равен половине гипотенузы. Какие значения имеют три-

гонометрические функции острых углов этого треугольника? Какие острые углы имеет этот треугольник?

9. В прямоугольном треугольнике катеты равны. Какие острые углы имеет этот треугольник? Какие значения имеют тригонометрические функции острых углов этого треугольника?

10. Для каких значений острого угла α выражения 1) $\sin\alpha - \frac{1}{2}$; 2) $\operatorname{tg}\alpha - \sqrt{3}$ положительны? отрицательны? равны 0?

[1) Положительно при $\alpha > 30°$; отрицательно при $\alpha < 30°$; равно 0 при $\alpha = 30°$].

11. Воспользовавшись дополнительными углами, заменить данные функции: 1) $\cos(60° - \alpha)$; 2) $\sin(65° - \alpha)$; 3) $\operatorname{tg}(25° + \alpha)$. [1) $\sin(30° + \alpha)$; 2) $\cos(25° + \alpha)$; 3) $\operatorname{ctg}(65° - \alpha)$].

12. Представить разность $\frac{\sqrt{3}}{2} - 1$ как разность синусов двух углов, затем как разность косинусов. [$\sin 60° - \sin 90°$; $\cos 30° - \cos 0°$].

13. Представить $1 + \sqrt{3}$ как сумму тангенсов двух углов. [$\operatorname{tg} 45° + \operatorname{tg} 60°$].

14. Представить $1 + \frac{1}{2}$ как сумму синусов двух углов, а затем как сумму косинусов углов.

[$\sin 90° + \sin 30°$; $\cos 0° + \cos 60°$].

15. Как изменятся значения тригонометрических функций $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$, если угол α увеличить в два раза 1) с 30° до 60°? 2) с 45° до 90°?

[Изменения угла и соответствующих тригонометрических функций не пропорциональны].

16. Вычислить: 1) $\operatorname{tg} 57° \cdot \operatorname{tg} 33°$; 2) $\frac{\sin 36°}{\cos 54°}$. [1) 1; 2) 1].

17. Определить знак разности: 1) $\sin 45° - \cos 60°$; 2) $\sin 60° - \cos 45°$; 3) $\cos 30° - \cos 45°$; 4) $\operatorname{tg} 30° - \operatorname{tg} 45°$; 5) $\cos 25° - \sin 45°$; 6) $\operatorname{tg} 25° - \operatorname{ctg} 30°$; 7) $\cos 20° - \sin 70°$; 8) $\operatorname{tg} 45° - \cos 0°$; 9) $\sin 0° - \operatorname{tg} 0°$.

[1) +; 2) +; 3) +; 4) —; 5) +; 6) —; 7) 0].

18. Что больше: 1) $\sin 50°$ или $\cos 50°$? 2) $\sin 15°$ или $\sin 40°$? 3) $\cos 25°$ или $\cos 50°$? 4) $\operatorname{tg} 20°$ или $\operatorname{tg} 30°$? 5) $\operatorname{ctg} 44°$ или $\operatorname{ctg} 70°$? 6) $\cos 35°$ или $\sin 55°$? 7) $\cos 20°$ или $\sin 30°$? 8) $\sin 5°$ или $\cos 40°$? 9) $\operatorname{tg} 25°$ или $\operatorname{ctg} 40°$? 10) $\cos 60°$ или $\operatorname{tg} 45°$?

19. Маятник, длина которого 1 *м*, отклоняется от положения равновесия на 10°. Найти расстояние конца ма-

ятника от вертикали, проходящей через точку привеса[1]. [0,174 *м*].

20. Мачта укрепляется с помощью растяжек, длина которых 10 *м*, а угол наклона их к горизонтальной плоскости 60°. На какой высоте к мачте прикреплены растяжки? [8,66 *м*].

21. Сила в 10 *кг* разложена на две взаимно перпендикулярные составляющие силы так, что углы, образованные направлением данной силы с направлениями составляющих, равны 30°, 60°. Определить величины этих сил. [8,66 *кг* и 5 *кг*].

22. Вертикальный шест длиной в 3 *м* отбрасывает тень, длина которой равна 5 *м*. Как определить угловую высоту солнца?

Указание. По тангенсу угла, равному 0,6, нужно найти угол.

23. Определить высоту дерева, если известно, что в тот момент, когда лучи солнца падают на землю под углом в 30°, тень от этого дерева равна 50 *м*. [28,8 *м*].

24. Известно, что дорога на протяжении 120 *м* поднимается на 12 *м*. Как определить угол наклона дороги к горизонту?

Указание. По синусу угла, равному 0,1, нужно найти угол.

25. Как вычислить угол подъема участка дороги, если известно, что высота подъема этого участка составляет 5% горизонтального протяжения его?

Указание. По тангенсу угла, равному 0,05, нужно найти угол.

26. Наибольший допустимый подъем железнодорожной линии равен 10 *м* на расстоянии в 1 *км* по горизонтали. Как найти наибольший допустимый угол подъема железнодорожной линии?

Указание. По тангенсу угла, равному 0,01, найти угол.

§ 2. Измерение дуг и углов

1. Какие величины принимаются за единицу при радианном и градусном измерениях углов? Какая связь существует между этими единицами?

2. Считая π равным $\frac{22}{7}$, вычислить: 1) какую часть

[1] Для решения задач этого параграфа следует воспользоваться таблицами значений тригонометрических функций.

радиана составляет угол в 1°? 2) сколько градусов содержит угол в 1 радиан? $\left[1)\ \frac{11}{630};\ 2)\ \frac{630}{11}\right]$.

3. Есть ли принципиальная разница между градусным и радианным измерениями углов (дуг)?

[Нет. Измерения эти отличаются одно от другого лишь единицами].

4. Выразить в градусной и радианной мере углы равностороннего треугольника, прямоугольного равнобедренного треугольника, правильного шестиугольника и правильного двенадцатиугольника.

$$\left[\frac{\pi}{3};\ \frac{\pi}{2}\ \text{и}\ \frac{\pi}{4};\ \frac{2\pi}{3};\ \frac{5\pi}{6}\ (150°)\right].$$

5. Выразить в градусах: π; $-\frac{\pi}{2}$; $\frac{2\pi}{3}$; $-\frac{5\pi}{6}$; $\frac{\pi}{4}$; $-\frac{3\pi}{4}$; $\frac{5}{9}\pi$; $\frac{7}{12}\pi$; $-\frac{9}{15}\pi$; $-\frac{21}{20}\pi$. [180°; — 90°; 120°; — 150°; 45°; — 135°; 100°; 105°; — 108°; — 189°].

6. Выразить в радианной мере углы: 10°; 5°; 40°; 50°; 25°; — 135°; — 270°; 810°.

$$\left[\frac{\pi}{18};\ \frac{\pi}{36};\ \frac{2}{9}\pi;\ \frac{5}{18}\pi;\ \frac{5\pi}{36};\ -\frac{3}{4}\pi;\ -\frac{3}{2}\pi;\ 4\frac{1}{2}\pi\right].$$

7. Вычислить с точностью до 0,01: $\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{2}{3}\pi$; $\frac{\pi}{6}$.

[1,57; 0,78; 1,05; 2,09; 0,52].

8. Окружность разделена тремя точками в отношении 3 : 4 : 5. Выразить в радианной мере каждую из полученных дуг и углы треугольника, вершинами которого служат эти точки деления окружности на части. Проверить полученный ответ. $\left[\frac{\pi}{2};\ \frac{2\pi}{3};\ \frac{5\pi}{6};\ \frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{3};\ \frac{5\pi}{12}\right]$.

9. Дополнить до прямого угла: $\frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{5}$; $\frac{3}{5}\pi$; $\frac{\pi}{12}$; — 15°; — 30°; $-\frac{\pi}{6}$; $-\frac{3\pi}{5}$; — 135°.

$$\left[\frac{\pi}{6};\ \frac{\pi}{3};\ \frac{3}{10}\pi;\ -\frac{\pi}{10};\ \frac{5}{12}\pi;\ 105°;\ 120°;\ \frac{2}{3}\pi;\ \frac{11}{10}\pi;\ 225°\right].$$

10. Углы треугольника относятся, как 2 : 3 : 7. Выразить углы этого треугольника в радианах. Проверить ответ.

$$\left[\frac{\pi}{6};\ \frac{\pi}{4};\ \frac{7\pi}{12}\right].$$

11. Как выразить одной формулой все дуги одной и той же окружности, имеющие своим началом точку A, а концом точку B, если одна из этих дуг равна 40°?

[$40° + 360°k$].

12. Как с помощью циркуля и линейки построить угол: 1) в 300°? 2) в $-150°$? 3) в $-\frac{3\pi}{4}$? 4) в 840°?

[4) $840° = 360° \cdot 2 + 120°$].

13. Как с помощью транспортира построить угол: 1) в 1 000°? 2) в $-1\,000°$? 3) в 500°? 4) в $-500°$?

[1) $1\,000° = 360° \cdot 2 + 280°$; 2) $-1\,000° = -360° \cdot 3 + 80°$].

14. Какие дуги одной и той же окружности имеют те же начальную и конечную точки, что и дуги: 1) в 60°? 2) в 135°? 3) в 216°? 4) в $-60°$? 5) в $-135°$?

[1) $360° \cdot k + 60°$; 2) $360° \cdot k + 135°$].

15. Окружность морских компасов делится на 32 равные части, называемые румбами. Выразить румб в радианах и в градусах.

$\left[\frac{\pi}{16};\ 11°15'\right]$.

16. Выразить в градусной и радианной мерах угол, равный: 1) $1\frac{1}{2}$; 2) $3\frac{1}{4}$; 3) $2\frac{1}{3}$; 4) $5\frac{3}{4}$ полных углов.

$\left[540°;\ 1\,170°;\ 840°;\ 2\,070°;\ 3\pi;\ 6\frac{1}{2}\pi;\ 4\frac{2}{3}\pi;\ 11\frac{1}{2}\pi\right]$.

17. Может ли быть вычислена длина дуги, если известно только: а) число градусов, содержащихся в этой дуге? б) число радиан? Что еще должно быть задано?

[Должен быть известен радиус дуги].

18. Вычислить длину дуги по следующим данным: 1) радиус дуги $R = 100$ *см*, величина дуги в радианах 0,17; 2) $R = 40$ *см*, величина дуги в градусах 90°.

[1) 17 *см*; 2) 62,8 *см*].

19. Точка, взятая на окружности шлифовального круга, вращается со скоростью 900 *м* в сек. Диаметр этого круга 4 *дм*. Найти угловую скорость вращения шлифовального круга.

[4 500 радианов].

20. Шкив электромотора делает 900 оборотов в минуту. Вычислить угловую скорость вращения этого шкива в градусах и радианах в секунду.

[5 400°; 30π].

21. Вал машины делает 50 оборотов в 1 сек. Найти угловую скорость (ω), в радианах в секунду, и линей-

ную (v), в метрах в секунду, 1) точки вала, удаленной от оси вращения на 0,1 *м*; 2) удаленной на 0,05 *м*.

[1) $\omega = 100\pi$, $v \approx 31{,}4$ *м* в сек.; 2) $\omega = 100\pi$, $v \approx 15{,}7$ *м* в сек.].

22. Вал газотурбинного двигателя делает 12 000 оборотов в минуту. Выразить угловую скорость этого вала в радианах в секунду. [400π].

23. До последнего времени мощные электрогенераторы сооружались с угловой скоростью якоря 50π радиан в секунду. В четвертой пятилетке появились мощные генераторы с угловой скоростью якоря 100π радиан в секунду. Сколько оборотов в минуту делает якорь генератора старых выпусков и сколько генератор нового типа? [1 500, 3 000].

24*. Для измерения углов часто пользуются особой единицей, называемой тысячной или делением угломера. Эта единица равна $\frac{1}{6000}$ полного угла.

Выразить: 1) тысячную в минутах; 2) минуту в тысячных; 3) градус в тысячных.

[1) 1 тысячная $= \frac{360 \cdot 60'}{6000} = 3{,}6'$; 2) $1'$, т. е. $\frac{1}{3{,}6} = \frac{5}{18}$ тысячных; 3) $1° = \frac{50}{3}$ тысячных].

25*. Выразить в тысячных углы, равные: 1) $36'$; 2) $3°$; 3) $6°$; 4) $12°$; 5) $36°$; 6) $48°$.

[1) 10; 2) 50; 3) 100; 4) 200; 5) 600; 6) 800].

26*. Найти длину дуги в одну тысячную, приняв число π приближенно равным 3 и обозначив радиус буквой R. $\left[\frac{R}{1000}\right]$.

27*. Вывести формулу для приближенного вычисления длины дуги L, если радиус ее R, а центральный угол, соответствующий ей, содержит n тысячных. $\left[L = \frac{R}{1000} n\right]$.

28*. Как воспользоваться формулой $L = \frac{R}{1000} n$, выведенной перед этим, для глазомерной оценки расстояний (R)?

[$R = \frac{L \cdot 1000}{n}$, L — длина некоторого протяжения, n — число тысячных в том углу, под которым это протяжение видно].

29*. Дерево, высота которого 16 *м*, видно наблюдателю под углом в 20 тысячных. Найти расстояние от наблюдателя до этого дерева. $\left[\frac{16 \cdot 1\,000}{20} = 800\ (м)\right]$.

30. В географии и астрономии для измерения некоторых углов (долгота на земле, прямое восхождение на небесной сфере) употребляется единица, называемая часом. Час — это одна двадцать четвертая часть полного угла. Час делится на 60 минут, а минута на 60 секунд. (1 час = 60 мин. = 60·60 сек.) Выразить час, минуту и секунду в градусах, минутах и секундах дуги. [1 час—15°; 1 минута — $\frac{1^\circ}{4}$, или 15′; 1 секунда— $\frac{1^\circ}{240}$, или 15″].

31. Узнать долготу и широту Москвы и Ленинграда в градусах и минутах дуги и выразить их в часах и минутах.

§ 3. Тригонометрические функции

1. Вычислить: 1) $\sin 2\pi + \cos 2\pi + \operatorname{tg} 2\pi$; 2) $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} + \operatorname{csc} \frac{\pi}{2}$; 3) $\operatorname{sc} 0 + \operatorname{csc} 0$; 4) $m \sin 0^\circ + n \sin 90^\circ + m \sin 180^\circ$; 5) $a \operatorname{tg} 0^\circ + b \operatorname{tg} 180^\circ + c \cos 90^\circ$; 6) $p^2 \sin \frac{\pi}{2} - 2pq \cos 0 - q^2 \cos \pi$.

[1) 1; 2) 1; 3) не имеет смысла; 4) n; 5) 0; 6) $(p-q)^2$].

2. Какие тригонометрические функции могут иметь значение, равное: 1) 0,5? 2) — 0,345? 3) 2,1? 4) — 5,623? 5) 0? 6) 1? 7) — 1? 8) $\sqrt{2}$? 9) $\sqrt{0{,}5}$?

3. Могут ли функции: 1) $\sin x$, 2) $\cos x$, 3) $\operatorname{tg} x$, 4) $\operatorname{ctg} x$ принимать отрицательные значения, если x выражает величину угла треугольника?

[Отрицательные значения могут иметь: $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$].

4. Какой знак имеет произведение $\sin x \cdot \operatorname{tg} x$, если: 1) x — угол II четверти? 2) x — угол III четверти, 3) x — угол IV четверти? [1) —; 2) —; 3) +].

5. Какой знак имеет разность: 1) $\sin 48^\circ - \sin 27^\circ$? 2) $\cos 48^\circ - \cos 27^\circ$? 3) $\operatorname{tg} 48^\circ - \operatorname{tg} 27^\circ$? 4) $\operatorname{ctg} 48^\circ - \operatorname{ctg} 27^\circ$? [1) +; 2) —; 3) +; 4) —].

6. Какой знак имеет произведение:

1) $\sin 115^\circ \cdot \cos 190^\circ$? 2) $\operatorname{tg} 160^\circ \cdot \operatorname{ctg} 280^\circ$?
3) $\cos 295^\circ \cdot \sin 195^\circ$? 4) $\sin 215^\circ \cdot \cos 215^\circ \cdot \operatorname{tg} 215^\circ$?
5) $\sin(-40^\circ) \cos(-40^\circ) \operatorname{tg}(-40^\circ)$?

[1) —; 2) +; 3) —; 4) +; 5) +].

7. В какой четверти найдутся такие значения x, для которых будет: 1) $\sin x + \cos x > 1$?
2) $\sin x + \cos x < -1$? [1) I; 2) III].

8. Почему абсолютная величина тангенса любого угла не меньше абсолютной величины синуса этого угла?

$$\left[|\operatorname{tg}\alpha| = \frac{|\sin\alpha|}{|\cos\alpha|}\right].$$

9. Может ли $\operatorname{tg}\alpha$ быть меньше $\sin\alpha$? Привести пример. [Может, например, при $\alpha = 135°$].

10. Какие тригонометрические функции при равных значениях аргумента принимают одинаковые по знаку значения? [$\sin x$ и $\csc x$, $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$, $\cos x$ и $\sec x$].

11. Чем отличаются друг от друга области определения функций $\sin x$ и $\operatorname{tg} x$.

[Для значений $x = \frac{\pi}{2}(2k+1)$ функция $\operatorname{tg} x$ не определена].

12. Какие области значений имеют функции $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, $\sec x$, $\csc x$? Какие числа являются общими для всех этих областей? [Общими числами для всех этих областей являются -1 и 1].

13. В каких четвертях функции $\sin x$ и $\cos x$ при возрастании x одновременно: 1) возрастают? 2) убывают? [1) IV; 2) II].

14. Для каких значений x между 0 и 2π: 1) функция $\sin x$ возрастает? убывает? 2) функция $\cos x$, возрастает? убывает? 3) функция $\sin x$ положительна? отрицательна? 4) функция $\cos x$ положительна? отрицательна? 5) $\sin x$ обращается в 0? 6) $\cos x$ обращается в 0?

15. Как построить углы, если: 1) синус каждого из них равен $-\frac{3}{5}$? 0,7? 2) косинус каждого из них равен $\frac{1}{4}$? $-\frac{1}{4}$? $-0,7$? 3) тангенс каждого из них равен $\frac{5}{4}$? $-\frac{5}{4}$? 2,3?

16. Как принято понимать записи: 1) $\sin 2$? 2) $\cos 3$? 3) $\operatorname{tg}(-5)$? [1) $\sin 2$ — синус угла или дуги в два радиана].

17. Пользуясь таблицей натуральных значений тригонометрических функций, найти: 1) $\sin\frac{1}{2}$; 2) $\cos 0,1$; 3) $\operatorname{tg} 1$. [1) 0,4795; 2) 0,9950; 3) 1,5567].

18. Что больше: 1) $\sin 1°$ или $\sin 1$? 2) $\cos 0,5°$ или $\cos 0,5$? 3) $\operatorname{tg} 1$ или 1? [1) $\sin 1$; 2) $\cos 0,5°$; 3) $\operatorname{tg} 1$].

19. Положительны или отрицательны следующие значения тригонометрических функций: 1) $\cos 4$? 2) $\sin 5$? 3) $\operatorname{tg} 5$? 4) $\operatorname{tg} 8$? 5) $\cos(-4)$? 6) $\operatorname{ctg} 0{,}1$?

[1) —; 2) —; 3) —; 4) —; 5) —; 6) +].

20. $f(x) = \sin x - \cos x$. Доказать, что $f(1) > 0$.

[$f(1) = \sin 1 - \cos 1 = \sin 57°17' - \cos 57°17' > 0$].

21. Почему приходится рассматривать тригонометрические функции отвлеченного аргумента?

[Тригонометрическими функциями приходится пользоваться не только тогда, когда аргумент их — дуга или угол. Аргументом может быть, например, время].

22. Какой смысл имеют выражения: 1) $\sin^2 x$? 2) $\sin x^2$? Можно ли второе выражение понимать таким образом, что берется синус от квадрата угла x? [1) $\sin^2 x = (\sin x)^2$; 2) $\sin(x^2)$; понятие квадрата угла бессмысленно, поэтому синус в данном случае берется от квадрата числа x].

23. Вычислить: 1) $\sin^2 90°$; 2) $\sin^3 270°$; 3) $\cos^2 180°$; 4) $\operatorname{tg}^2 \pi$. [1) 1; 2) —1; 3) 1; 4) 0].

24. Имеют ли центр симметрии и оси симметрии графики следующих функций: 1) $y = \sin x$? 2) $y = \cos x$? 3) $y = \operatorname{tg} x$? 4) $y = \operatorname{ctg} x$? [Центр симметрии имеют графики функций: $\sin x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$. Ось симметрии имеет график функции $\cos x$ (ось y)].

25*. Чем отличаются друг от друга графики функций: 1) $y = \sin x$ и $y = \sin(x + a)$? 2) $y = \sin x$ и $y = 2\sin x$? 3) $y = \sin x$ и $y = -\sin x$? 4) $y = \sin x$ и $y = \frac{1}{2}\sin x$? 5) $y = \sin x$ и $y = \sin 2x$? 6) $\sin x$ и $1 + \sin x$?

[1) График функции $\sin(x + a)$ — это сдвинутый влево в направлении оси x на расстояние a график функции $\sin x$; 2) ординаты точек графика функции $2\sin x$ получаются умножением на 2 соответствующих ординат графика функции $\sin x$; 3) график функции $-\sin x$ симметричен графику функции $\sin x$ относительно оси x; 4) график функции $\frac{1}{2}\sin x$ получается путем сжатия графика функции $\sin x$ по оси y в два раза; 5) график функции $\sin 2x$ получается путем сжатия графика функции $\sin x$ в напразлении оси x в два раза; 6) график функции $1 + \sin x$ — это сдвинутый вверх в направлении оси y на расстояние 1 график функции $\sin x$].

26. 1) Какие функции называются периодическими? 2) Что называется периодом функции? 3) Как можно равенством записать периодичность функции: $\sin x$; $\cos x$; $\operatorname{tg} x$; $\operatorname{ctg} x$? 4) Каким свойством обладают графики периодических функций?

[1) Функция $f(x)$ называется периодической, если существует такое постоянное число a, что для любого значения аргумента x будет справедливо равенство $f(x+a)=f(x)$; 2) наименьшее положительное число, от прибавления которого к любому значению аргумента значение функции не изменяется, называется периодом этой функции; 3) $\sin(x+2\pi)=\sin x$, $\operatorname{tg}(x+\pi)=\operatorname{tg} x$; 4) график периодической функции получается путем повторения части его, соответствующей периоду].

27*. Найти период функции: 1) $y=\sin x+\cos x$, 2) $y=\cos 2x$; 3) $y=\sin x+\operatorname{tg} x$; 4) $y=\sin\frac{x}{4}$; 5) $y=\sin^2 x$; 6) $y=\sin x\cos x$; 7) $y=\operatorname{tg} 2x$; 8) $y=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$; 9) $y=\sin\frac{x}{a}$; 10) $y=\operatorname{tg} ax$.

[1) 2π; 2) π; 3) 2π; 4) 8π; 5) π; 6) π; 7) $\frac{\pi}{2}$; 8) 2π; 9) $2\pi a$; 10) $\frac{\pi}{a}$].

28. 1) Какая функция называется четной? нечетной? 2) Каким свойством обладает график четной функции? нечетной? 3) Какие основные тригонометрические функции являются четными? нечетными? 4) Привести пример такой функции, которая выражалась бы с помощью основных тригонометрических функций и не являлась бы ни четной, ни нечетной. 5) Какие свойства функций: $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ выражают тождества. 1) $\sin(-x)=-\sin x$? 2) $\cos(-x)=\cos x$? 3) $\operatorname{tg}(-x)=-\operatorname{tg} x$? 4) $\operatorname{ctg}(-x)=-\operatorname{ctg} x$?

[1) Функция $f(x)$ называется четной, если для любого значения аргумента x справедливо равенство $f(-x)=f(x)$ и нечетной, если справедливо равенство $f(-x)=-f(x)$; 2) ось y является осью симметрии для графика четной функции; график нечетной функции имеет центр симметрии — начало координат; 3) четные функции: $\cos x$ и $\sec x$, остальные нечетные; 4) например: $\sin x+\cos x$; 5) четность и нечетность функций].

29. Как изменяется функция $y=\sin^2 x$ при увеличении x от 0 до 2π? [При возрастании x от 0 до $\frac{\pi}{2}$ y возра-

стает от 0 до 1; при возрастании x от $\frac{\pi}{2}$ до π y убывает от 1 до 0; при возрастании x от π до $\frac{3\pi}{2}$ y возрастает от 0 до 1; дальше y убывает от 1 до 0].

30. Как изменяются функции: 1) $y = 1 + \sin x$; 2) $y = 1 - \cos x$ при возрастании x от 0 до 2π?

31. Определить, для каких значений x от 0 до 2π функция $y = \sin x - \cos x$: 1) обращается в 0? 2) принимает положительные значения? 3) отрицательные? Ответить на аналогичные вопросы относительно функций: $y = \sin x + \cos x$ и $y = \sin x \cos x$. [1) 45° и 225°; 2) $45° < x < 225°$; 3) $0° < x < 45°$; $225° < x < 360°$].

32. Найти область значений функции: 1) $y = |\cos x|$; 2) $y = |\operatorname{tg} x|$. [1) $0 \leqslant y \leqslant 1$; 2) $0 \leqslant y < +\infty$].

33. 1) Чем отличается график функции $y = |\sin x|$ от графика функции $y = \sin x$? 2) Чем отличаются друг от друга графики функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = |\operatorname{tg} x|$? 3) $y = |\operatorname{tg} x|$ и $y = |\operatorname{ctg} x|$?

[1) График функции $y = |\sin x|$ проходит в верхней координатной полуплоскости].

34. Для каких значений x в промежутке от 0 до 2π: 1) функция $y = |\cos x|$ возрастает? убывает? 2) функция $y = |\operatorname{tg} x|$ возрастает? убывает?

[1) Промежутки возрастания: от $\frac{\pi}{2}$ до π и от $\frac{3\pi}{2}$ до 2π, промежутки убывания: от 0 до $\frac{\pi}{2}$ и от π до $\frac{3\pi}{2}$].

35. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = |\sin x|$. При каких значениях x данная функция принимает эти значения? [Наибольшее значение функция $|\sin x|$ принимает при $x = \frac{\pi}{2}(2k + 1)$, наименьшее значение 0 эта функция принимает при $x = k\pi$].

36. При каких значениях x в промежутке от 0 до 2π функция: 1) $y = 1 + \sin x$; 2) $y = 1 - \cos x$ принимает наибольшее и наименьшее значения? Вычислить эти значения. [1) Наибольшее значение, равное 2, функция $1 + \sin x$ принимает при $x = \frac{\pi}{2}$, наименьшее, равное 0, при $x = \frac{3\pi}{2}$].

37*. Для каких значений x функция: 1) $y = \sin(\cos x)$; 2) $y = \operatorname{tg}(\sin x)$ принимает наибольшее значение и для ка-

ких наименьшее? Пользуясь таблицами натуральных значений тригонометрических функций, найти эти значения функций. [1) Наибольшее значение, равное $\sin 1$, функция $\sin(\cos x)$ принимает при $x = 2k\pi$, наименьшее, равное $\sin(-1)$ при $x = \pi(2k+1)$].

38. Для каких значений x определена функция $y = \frac{1}{1+\cos x}$. Найти наименьшее значение этой функции и указать, при каких значениях x оно получается.

[Данная функция определена для всех действительных чисел, кроме чисел вида $\pi(2k+1)$. Наименьшее значение, равное $\frac{1}{2}$, эта функция принимает при $x = 2k\pi$].

39. Имеет ли функция $y = 1 + \operatorname{tg} x$: 1) наибольшее значение? 2) наименьшее значение? [Нет].

40*. 1) Для каких значений x определена функция $y = \frac{1+\cos x}{1+\sin x}$? 2) Какие действительные значения принимает она? [1) Данная функция определена для всех действительных чисел за исключением чисел $\frac{3\pi}{2} + 2k\pi$. 2) Положительные и 0].

41*. 1) Найти область определения функции: а) $y = \sin x \csc x$; б) $y = \cos x \sec x$; в) $y = \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x$. 2) Какие значения принимает каждая из этих функций?

[1) а) Все действительные числа, за исключением чисел вида $k\pi$; б) все действительные числа, за исключением чисел вида $(2k+1)\frac{\pi}{2}$; в) все действительные числа за исключением чисел вида $\frac{\pi}{2}k$; 2) 1].

42. При каких значениях x, заключенных между 0 и 2π, имеют смысл выражения: 1) $\sqrt{\sin x}$? 2) $\sqrt{\sin 2x}$? 3) $\sqrt{1-\cos x}$? 4) $\frac{\sin x}{\cos^2 x}$? 5) $\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 2x}$?

[1) $0 \leqslant x \leqslant \pi$; 2) $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$; 3) $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$; 4) $x \neq \frac{\pi}{2}$, $x \neq \frac{3\pi}{2}$; 5) для всех, за исключением: $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{4}$, 0, π, 2π].

43. Установить область определения функции: 1) $y=\frac{x}{\sin x}$; 2) $y=\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}$.

$\left[1)\ x\neq\pi k;\ 2)\ 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right]$.

44*. 1) Найти область определения функции $y=\frac{\cos x}{\operatorname{sc} x}$. 2) Для каких значений аргумента эта функция положительна? 3) Для каких значений аргумента она отрицательна? 4) Найти корни этой функции. 5) Может ли эта функция принимать значения, превосходящие 1?

[1) Все действительные числа, за исключением чисел $\frac{\pi}{2}(2k+1)$; 2) для всех допустимых значений x функция положительна; 3) таких значений аргумента нет; 4) функция не имеет корней; 5) не может].

45[1]**.** Указать границы, в которых, при изменении x от $-\infty$ до $+\infty$, изменяются значения функции: 1) $y=\sin^2 x$; 2) $y=\sin^3 x$; 3) $y=3\sin^{2n}x$; 4) $y=0{,}5\cos^{(2n-1)}x$; 5) $y=\sin x^2$; 6) $y=\sin x^3$.

[1) От 0 до 1; 2) от -1 до 1; 3) от 0 до 3; 4) от $-0{,}5$ до 0,5; 5) и 6) от -1 до 1].

46*. Простое гармоническое колебательное движение точки выражается функцией $s=A\sin(\omega t+\varphi_0)$, где s — расстояние движущейся по прямой линии точки от положения равновесия, а t — время, прошедшее с начала движения; постоянная величина A, называемая амплитудой колебания, выражает размах колебания; постоянная ω характеризует частоту колебаний; φ_0 называется начальной фазой.

1) Показать, что число $T=\frac{2\pi}{\omega}$ является периодом функции $A\sin(\omega t+\varphi_0)$. 2) Какой физический смысл имеет это число? 3) Какой физический смысл имеет число, обратное T? [1) $A\sin\left[\omega\left(t+\frac{2\pi}{\omega}\right)+\varphi_0\right]=A\sin(\omega t+2\pi+\varphi_0)=$ $=A\sin(\omega t+\varphi_0)$; 2) T — период колебания, т. е. тот промежуток времени, в течение которого движущаяся точка совершает полное колебание; 3) $\frac{1}{T}$ — частота колебания, т. е. число полных колебаний в единицу времени (секунду)].

[1] n — натуральное число.

47*. Найти период и частоту гармонического колебания $y = \sin \omega t$. [Период $\frac{2\pi}{\omega}$, частота $\frac{\omega}{2\pi}$].

48*. Даны три простых гармонических колебания: $y = \sin \frac{x}{2}$; $y = 2 \sin \frac{x}{2}$; $y = 4 \sin \frac{x}{2}$. 1) Какой период имеет каждое из этих колебаний? 2) Чем отличаются друг от друга эти колебания? [1) $T = 4\pi$; 2) амплитудами].

49*. Даны три простых гармонических колебания: 1) $y = 3 \sin t$; 2) $y = 3 \sin 2t$; 3) $y = 3 \sin 4t$. Какой период и амплитуду имеет каждое из этих колебаний?

[1) 2π, 3; 2) π, 3; 3) $\frac{\pi}{2}$, 3].

50*. Чем отличаются друг от друга гармонические колебания: 1) $y = 2 \sin \left(3t + \frac{\pi}{3}\right)$?) 2) $y = 2 \sin \left(3t - \frac{\pi}{6}\right)$? 3) $y = 2 \sin \left(2t - \frac{\pi}{6}\right)$? 4) $y = 0{,}5 \sin \left(2t - \frac{\pi}{6}\right)$?

51*. Какие амплитуду, период, частоту и начальную фазу имеют следующие простые гармонические колебания: 1) $y = \sin 3t$? 2) $y = 5 \cos 2t$? 3) $y = 4 \sin \pi t$? 4) $y = 2 \sin \frac{t}{2}$? 5) $y = 2 \sin (3t + 5)$? 6) $y = -\cos \frac{t-1}{2}$? 7) $y = \frac{1}{3} \sin 2\pi (t - 3)$?

§ 4. Зависимости между тригонометрическими функциями

1. Какие соотношения между тригонометрическими функциями обычно считаются основными?

[1) $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$; 2) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$; 3) $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$].

2. Указать какую-либо зависимость между тригонометрическими функциями одного и того же угла x которая теряет смысл для отдельных значений x?

[Например, формула $1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x$ не имеет смысла при $x = \frac{\pi}{2}(2k + 1)$].

3. Найдется ли такое значение аргумента x, для которого было бы: 1) $\sin x = \frac{3}{5}$, а $\cos x = \frac{4}{5}$? 2) $\sin x = \frac{2}{3}$, $\cos x = \frac{4}{5}$? 3) $\sin x = \frac{2}{3}$, $\operatorname{tg} x = \frac{1}{3}$?

[1) Да; 2), 3) нет].

4. 1) Как выражается $\operatorname{tg}\alpha$ через $\sin\alpha$? 2) Как выражаются $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ через $\operatorname{tg}\alpha$? 3) Как выражается $\sin\alpha$ через $\operatorname{tg}\alpha$ и $\cos\alpha$? 4) Как выражается $\cos\alpha$ через $\operatorname{tg}\alpha$ и $\sin\alpha$?

$\left[1)\ \operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}};\quad 2)\ \sin\alpha=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}};\right.$
$\cos\alpha=\frac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}};\ 3)\ \sin\alpha=\operatorname{tg}\alpha\cos\alpha;\ 4)\ \cos\alpha=\left.\frac{\sin\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}\right].$

5. Найти все тригонометрические функции, зная, что: 1) $\sin\alpha=\frac{15}{17}$; 2) $\sin\alpha=-\frac{7}{25}$; 3) $\sin\alpha=0{,}8$; 4) $\cos\alpha=-\frac{2}{3}$; 5) $\cos\alpha=\frac{84}{85}$; 6) $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{4}$; 7) $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{8}{15}$.

6.

Дано:	Найти:	
1) $\sin x=\frac{1}{5}$;	$\cos x$.	$\left[\pm\frac{2\sqrt{6}}{5}\right]$.
2) $\sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{3\pi}{2}<x<2\pi$;	$\cos x$.	$\left[\frac{1}{2}\right]$.
3) $\cos x=\frac{3}{5}$, $\frac{13}{6}\pi<x<\frac{5}{2}\pi$.	$\sin x$.	$\left[\frac{4}{5}\right]$.

7. Упростить: 1) $\sin\alpha\operatorname{ctg}\alpha+\cos\alpha$; 2) $\frac{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}$; 3) $\frac{\sin^2\alpha}{1-\cos\alpha}$; 4) $1+\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$; 5) $\sin^2\alpha-1$; 6) $(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)$; 7) $2-\sin^2\alpha-\cos^2\alpha$; 8) $\frac{\sin^2\alpha-1}{\cos^2\alpha-1}$; 9) $\frac{\sec x-\operatorname{tg}x}{\sec x}$; 10) $\frac{1}{\sec^2\alpha}+\frac{1}{\operatorname{csc}^2\alpha}$; 11) $\sin\alpha\cos\alpha\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha\sec\alpha\operatorname{csc}\alpha$; 12) $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2$.

[1) $2\cos\alpha$; 2) $\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta$; 3) $1+\cos\alpha$; 4) $2\cos^2\alpha$; 5) $-\cos^2\alpha$; 6) $\sin^2\alpha$; 7) 1; 8) $\operatorname{ctg}^2\alpha$; 9) $1-\sin x$; 10) 1; 11) 1; 12) 2].

8[1]. Проверить: 1) $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha=\sin^2\alpha-\cos^2\alpha$; 2) $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha-\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=0$; 3) $\sin^4\alpha+2\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha=1$; 4) $\sin^4\alpha+\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^2\alpha=1$; 5) $(\sin x+\cos x)^2+(-\sin x+\cos x)^2=2$;

[1] Условия последних упражнений выписать на доске.

6) $\sec^2\alpha - \sin^2\alpha - \operatorname{tg}^2\alpha = \cos^2\alpha$; 7) $\frac{1}{\cos^2\alpha} - \operatorname{tg}^2\alpha = 1$;

8) $\frac{2\cos^2\alpha - 1}{1 - 2\sin^2\alpha} = 1$; 9) $\sec\alpha + \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sin\alpha} - \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{1}{\cos\alpha}$;

10) $(a\sin x + b\cos x)^2 + (b\sin x - a\cos x)^2 = a^2 + b^2$.

9. Выразить: 1) $\frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha}$ через $\operatorname{tg}\alpha$; 2) $\frac{1}{\sin^2\alpha + \sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha}$ через $\operatorname{tg}\alpha$.

$\left[1)\ \frac{\operatorname{tg}\alpha + 1}{\operatorname{tg}\alpha - 1};\ 2)\ \frac{\operatorname{tg}^2\alpha + 1}{\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}\alpha + 1}\right]$.

10. Дано: 1) $\operatorname{tg}\alpha = 3$, вычислить $\operatorname{tg}^2\alpha + 2\sec^2\alpha$; 2) $\operatorname{cosec}\alpha = 3$, вычислить $\frac{1}{1 - \cos^2\alpha}$; 3) $\operatorname{tg}\alpha = 2$, вычислить $\frac{4\sin\alpha - 2\cos\alpha}{5\cos\alpha + 3\sin\alpha}$.

$\left[1)\ 29;\ 2)\ 9;\ 3)\ \frac{6}{11}\right]$.

11. Дано: $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = 10$. Вычислить: 1) $\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha$; 2) $\operatorname{tg}^3\alpha + \operatorname{ctg}^3\alpha$. [1) 98; 2) 970].

12. Дано: $\sin\alpha + \cos\alpha = p$. Найти: 1) $\sin\alpha\cos\alpha$; 2) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha$; 3) $\sin\alpha - \cos\alpha$; 4) $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha$.

$\left[1)\ \frac{p^2 - 1}{2};\ 2)\ 1;\ 3)\ \sqrt{2 - p^2};\ 4)\ \frac{1 - p^4 - 2p^2}{2}\right]$.

13*. Найти $\cos\varphi$, если $\sin\varphi = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a + b}$. $\left[\pm\frac{\sqrt{2ab}}{a + b}\right]$.

14. Зная, что $\operatorname{tg}\varphi = \frac{m}{n}$, найти $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$.

$\left[\cos\varphi = \pm\frac{n}{\sqrt{n^2 + m^2}},\ \sin\varphi = \pm\frac{m}{\sqrt{n^2 + m^2}}\right]$.

15. Доказать тождества: 1) $\frac{\operatorname{tg}x + \operatorname{tg}y}{\operatorname{ctg}x + \operatorname{ctg}y} = \operatorname{tg}x\operatorname{tg}y$; 2) $\operatorname{ctg}^2\alpha - \cos^2\alpha = \operatorname{ctg}^2\alpha\cos^2\alpha$.

16*. Пусть $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Доказать неравенство $\sin\alpha\cos\alpha \leqslant \frac{1}{2}$.

Указание. Для доказательства неравенства можно: воспользоваться очевидным неравенством $(\sin\alpha - \cos\alpha)^2 \geqslant 0$.

17. Найти острые (или прямые) углы, удовлетворяющие уравнению: 1) $2\sin^2 x - \sin x = 0$; 2) $\cos^2 x = 2\cos x$;

3) $\sin^2 x - \cos^2 x = 1$; 4) $\sin x = \cos x$; 5) $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 0$.

[1) 0°, 30°; 2) 90°; 3) 90°; 4) 45°; 5) 30°].

§ 5. Формулы приведения

1. Данные тригонометрические функции привести к тригонометрическим функциям углов, меньше 45°: $\sin 137°$, $\cos 110°$, $\operatorname{tg} 160°$, $\sin(-250°)$, $\cos(-190°)$, $\operatorname{tg} 300°$, $\sin 1\,000°$, $\cos 1\,000°$, $\operatorname{tg}(-1\,000°)$.

[$\sin 43°$, $-\sin 20°$, $-\operatorname{tg} 20°$, $\cos 20°$, $-\cos 10°$, $-\operatorname{ctg} 30°$, $-\cos 10°$, $\sin 10°$, $\operatorname{ctg} 10°$].

2. Вычислить: 1) $\sin \frac{13}{6}\pi$; 2) $\cos \frac{20}{3}\pi$; 3) $\operatorname{tg}\left(-\frac{19}{4}\pi\right)$.

$\left[1) \frac{1}{2}; \quad 2) -\frac{1}{2}; \quad 3) \ 1\right]$.

3. Найти: 1) $\sin 120°$; 2) $\operatorname{tg} 150°$; 3) $\cos 210°$; 4) $\sin 240°$; 5) $\operatorname{ctg} 330°$; 6) $\sin 300°$; 7) $\operatorname{tg} 315°$; 8) $\cos(-135°)$; 9) $\operatorname{tg}(-225°)$.

$\left[1) \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad 2) -\frac{1}{\sqrt{3}}; \quad 3) -\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad 4) -\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad 5) -\sqrt{3}; \right.$

$\left. 6) -\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad 7) -1; \quad 8) -\frac{\sqrt{2}}{2}; \quad 9) -1\right]$.

4. Вычислить: 1) $\cos^2(18{,}25\pi)$; 2) $\operatorname{tg} 44° \cdot \operatorname{tg} 45° \cdot \operatorname{tg} 46°$; 3) $\sin 7\pi$.

$\left[1) \frac{1}{2}; \quad 2) \ 1; \quad 3) \ 0\right]$.

5. Преобразовать: 1) $\sin(180° - \alpha) + \cos(90° + \alpha)$; 2) $\cos(180° - \alpha) \cdot \sin(90° - \alpha)$; 3) $\operatorname{tg}(270° - \alpha) \cdot \operatorname{tg}(180° + \alpha)$; 4) $\sin(270° - \alpha) - \cos(180° + \alpha)$; 5) $\cos(270° + \alpha) + \sin(180° + \alpha)$; 6) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) - \cos(\pi - \alpha)$; 7) $\sin(-\alpha) - \cos\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right)$; 8) $\sin(\alpha - \pi)$; 9) $\cos(\alpha - \pi)$; 10) $\operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{3}{2}\pi\right)$.

[1) 0; 2) $-\cos^2\alpha$; 3) 1; 4) 0; 5) 0; 6) $2\cos\alpha$; 7) 0; 8) $-\sin\alpha$; 9) $-\cos\alpha$; 10) $-\operatorname{ctg}\alpha$].

6. Сравнить значения функций: 1) $\sin^2 x$; 2) $\sin x^2$; 3) $\sin^3 x$; 4) $\sin x^3$; 5) $\cos^3 x$; 6) $\cos x^3$; 7) $\sin x \cos x$; 8) $\sin x \operatorname{tg} x$; 9) $\sin x + \operatorname{tg} x$; 10) $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$ при $x = a$ и $x = -a$.

[7) Равны по абсолютной величине, но противоположны по знаку; 8) равны].

7. Назовите несколько таких положительных и отрицательных углов: 1) чтобы синус каждого из них был равен $\sin 37°$; 2) чтобы косинус каждого из них был равен $\cos 37°$; 3) чтобы тангенс был равен $\operatorname{tg} 37°$.

[1) 143°, 397°, —217°, —323°,...].

8. Дана общая формула, выражающая величину угла: $x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$. 1) В каких четвертях лежат конечные радиусы, образующие эти углы? 2) Какие углы получаются при $k = 0, 1, 2, -1, -2$? 3) Найти синус, косинус и тангенс каждого из этих углов.

$\left[1)\ \text{II и III четверти};\ 2) \pm \frac{2\pi}{3},\ \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi \text{ и т. д.};\right.$

$\left. 3) \sin x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2},\ \cos x = -\frac{1}{2},\ \operatorname{tg} x = \mp \sqrt{3}\right].$

9. Какие значения принимает $\sin x$, если $x = \frac{k\pi}{3}$, где k — целое число?

$$\left[0, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \ldots\right].$$

10. Выразить одной формулой все значения x, если: 1) $\sin x = 0$; 2) $\cos x = 0$; 3) $\operatorname{tg} x = 0$; 4) $\sin x = 1$; 5) $\cos x = 1$; 6) $\operatorname{tg} x = 1$; 7) $\sin x = -1$; 8) $\cos x = -1$; 9) $\operatorname{tg} x = -1$; 10) $\sin x = \frac{1}{2}$; 11) $\sin x = -\frac{1}{2}$; 12) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$; 13) $\cos x = \frac{1}{2}$; 14) $\cos x = -\frac{1}{2}$; 15) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\left[1)\ k\pi;\ 2) \pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ или } \frac{\pi}{2}(2k+1);\ 3)\ k\pi;\ 4) \frac{\pi}{2} + k\pi;\right.$

$\left. 5)\ 2k\pi;\ 6) \frac{\pi}{4} + k\pi\right].$

11. Найти: 1) $\sin\left(-\frac{3}{2}\pi\right)$, 2) $\cos(-\pi)$. Не противоречат ли полученные ответы формулам $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ и $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$?

[1) 1; синус отрицательного угла может быть положительным числом; 2) —1; косинус отрицательного угла может быть отрицательным числом.]

12. Почему для нахождения значений тригонометрических функций, при любых допустимых значениях ар-

гумента, достаточно иметь таблицы значений этих функций для значений аргумента от 0° до 45°?

13. 1) Как можно получить график функции $y = \cos x$, имея график функции $y = \sin x$? 2)* Как по графику функции $y = \operatorname{tg} x$ можно построить график функции $y = \operatorname{ctg} x$?

[1) Чтобы получить график функции $y = \cos x$, следует график функции $y = \sin x$ сдвинуть влево, в направлении оси x, на расстояние $\frac{\pi}{2}$, так как $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.]

§ 6. Формулы сложения. Формулы двойного и половинного аргументов

1. 1) Как могут быть вычислены значения $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ по известным значениям тригонометрических функций углов в 30°, 45°, 60°, если: а) $x = 75°$? б) $x = 15°$? в) $x = 22°30'$? 2) Вычислить: $\sin 75°$ и $\cos 75°$. 3) Вычислить $\sin 15°$ и $\cos 15°$.

[2) $\sin 75° = \sin(30° + 45°) = \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4}$, $\cos 75° = \cos(30° + 45°) = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$; 3) $\sin 15° = \cos 75°$, $\cos 15° = \sin 75°$.]

2. Вычислить $\operatorname{tg} 75°$; $\operatorname{tg} 15°$; $\operatorname{tg} 105°$. Какой знак имеет $\operatorname{tg} 105°$?

$\left[\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}; \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}; \frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} < 0\right]$.

3. Вычислить $\alpha + \beta$, если: 1) $\operatorname{tg}\alpha = 2$, $\operatorname{tg}\beta = 3$; 2) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{7}$. $\left[1) -\frac{\pi}{4} + \pi k; 2) \frac{\pi}{4} + \pi k\right]$.

4. Вычислить $\cos(\alpha + \beta)$, если $\cos\alpha = \frac{4}{5}$, $\sin\beta = \frac{5}{13}$ и 1) α — угол I четверти, β — угол I четверти; 2) α — угол I четверти, β — угол II четверти. $\left[1) \frac{33}{65}; 2) -\frac{63}{65}\right]$.

5. Дано: $\sin x - \cos x = \frac{1}{5}$. Вычислить $\sin 2x$. $\left[\frac{24}{25}\right]$.

6. Дано: $\sin\alpha = 1$, $\sin\beta = \frac{1}{2}$, $\alpha = 90°$, $0 < \beta < 90°$.

1) Найти $\alpha - \beta$ и все тригонометрические функции этой разности. 2) Найти $\alpha + \beta$, $\sin(\alpha + \beta)$ и $\cos(\alpha + \beta)$. 3) Сравнить $\sin(\alpha + \beta)$ и $\sin\alpha + \sin\beta$, $\cos(\alpha + \beta)$ и $\cos\alpha + \cos\beta$.

$\left[1)\ 60°;\ 2)\ \text{и}\ 3)\ \sin 120° = \frac{\sqrt{3}}{2} < \frac{3}{2},\ \cos 120° = -\frac{1}{2} < 0 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$.

7. Доказать, что если α и β — острые углы, то $\sin(\alpha + \beta) < \sin\alpha + \sin\beta$.

Указание. Воспользоваться формулой $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$.

8. Для каких значений α и β справедливо равенство $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha + \sin\beta$?

[$\alpha = -\beta + 2\pi n$, или $\alpha = 360° \cdot n$, или $\beta = 360° \cdot n$].

9. Вычислить: 1) $\sin 20° \cdot \cos 40° + \cos 20° \cdot \sin 40°$; 2) $\cos 47° \cdot \cos 17° + \sin 47° \cdot \sin 17°$; 3) $\frac{\operatorname{tg} 70° - \operatorname{tg} 40°}{1 + \operatorname{tg} 70° \cdot \operatorname{tg} 40°}$; 4) $\frac{\operatorname{tg} 70° + \operatorname{tg} 80°}{1 - \operatorname{tg} 70° \cdot \operatorname{tg} 80°}$; 5) $\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\frac{5\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{5\alpha}{2}}$, $\alpha = 15°$.

$\left[1)\ \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2};\ 2)\ \frac{\sqrt{3}}{2};\ 3)\ \operatorname{tg} 30° = \frac{1}{\sqrt{3}};\ 4)\ \operatorname{tg} 150° = -\frac{\sqrt{3}}{3};\ 5)\ \operatorname{tg} 45° = 1\right]$.

10. Упростить: 1) $\sin 60° \cdot \cos 30° - \cos 60° \cdot \sin 30°$; 2) $\cos 30° \cdot \cos 60° - \sin 30° \cdot \sin 60°$; 3) $\sin 45° \cdot \cos 30° + \cos 45° \cdot \sin 30°$; 4) $\cos\frac{\pi}{4} \cdot \cos\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{4} \cdot \sin\frac{\pi}{6}$; 5)* $\sin 3{,}29 \cdot \cos 0{,}15 - \cos 3{,}29 \cdot \sin 0{,}15$.

$\left[1)\ \sin 30° = \frac{1}{2};\ 2)\ \cos 90° = 0;\ 3)\ \sin 75°;\ 4)\ \cos\frac{\pi}{12};\ 5)\ \sin 3{,}14 \approx \sin\pi = 0\right]$.

11. Упростить: 1) $\sin(\alpha + \beta) \pm \sin(\alpha - \beta)$; 2) $\cos(\alpha + \beta) \pm \cos(\alpha - \beta)$; 3) $\sin(\alpha + \beta) - 2\sin\alpha\cos\beta$; 4) $\cos(\alpha - \beta) - 2\sin\alpha\sin\beta$; 5) $\cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta) \mp \sin(\alpha + \beta)\sin(\alpha - \beta)$; 6) $\sin(\alpha + 45°)\cos(\alpha - 45°) - \cos(\alpha + 45°)\sin(\alpha - 45°)$.

[1) $2\sin\alpha\cos\beta$, $2\cos\alpha\sin\beta$; 2) $2\cos\alpha\cos\beta$, $-2\sin\alpha\sin\beta$; 3) $-\sin(\alpha - \beta)$; 4) $\cos(\alpha + \beta)$; 5) $\cos 2\alpha$, $\cos 2\beta$; 6) $\sin 90° = 1$].

12. Проверить: 1) $\frac{1-\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x}=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$; 2) $\frac{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}=\operatorname{tg}\beta$; 3) $\frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)}=$ $=-\operatorname{ctg}\alpha$; 4) $\sin(\alpha+\beta)\cos\gamma+\cos(\alpha+\beta)\sin\gamma=$ $=\sin(\alpha+\beta+\gamma)$; 5) $\cos(\alpha+\beta)\cos\gamma-\sin(\alpha+\beta)\sin\gamma=$ $=\cos(\alpha+\beta+\gamma)$; 6) $\sin(x+y)\sin(x-y)=\sin^2 x-\sin^2 y$.

13*. При каких значениях x, заключенных между 0° и 360°, функции: 1) $y=\cos x+\sin x$, 2) $y=\cos x-\sin x$, 3) $y=\cos x\sin x$ принимают наибольшие значения? наименьшие? обращаются в 0?

Указание. Для ответа на поставленные вопросы следует воспользоваться формулами: 1) $\cos x+\sin x=$ $=\sqrt{2}\cos(45°-x)$; 2) $\cos x-\sin x=\sqrt{2}\sin(45°-x)$; 3) $\cos x\sin x=\frac{1}{2}\sin 2x$.

14. Для каких значений x, заключенных между 0 и 2π, функция $y=\sin x+\cos x$ принимает значения больше 1? $\left[0<x<\frac{\pi}{2}\right]$.

15. Дано: $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{4}$, $\operatorname{tg}\beta=\frac{1}{7}$, причем α и β — острые углы. Доказать, что $\alpha+\beta=45°$.

16. Решить уравнения: 1) $\sin 2x\cos x+\cos 2x\sin x=0$; 2) $\cos(x-45°)+\sin(45°+x)=0$.

$\left[1)\ x=\frac{k\pi}{3};\ 2)\ x=-\frac{\pi}{4}+k\pi\right]$.

17*. Дано: $x=A\sin(\beta+\gamma)$, $y=A\sin(\beta-\gamma)$. Показать, что $x+y=2A\sin\beta\cos\gamma$.

18. Преобразовать с помощью формул тригонометрических функций двойного аргумента: 1) $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2$; 2) $\sin^2\alpha\cos^2\alpha$; 3) $1-4\sin^2\alpha\cos^2\alpha$; 4) $1+\cos 2\alpha+2\sin^2\alpha$; 5) $2\sin^2\alpha-1$; 6) $\cos^4\frac{\alpha}{2}-\sin^4\frac{\alpha}{2}$; 7) $\sin 4\alpha$.

$\left[1)\ 1+\sin 2\alpha;\ 2)\frac{1}{4}\sin^2 2\alpha;\ 3)\ \cos^2 2\alpha;\ 4)\ 2;\ 5)-\cos 2\alpha;\right.$ $\left.6)\ \cos\alpha;\ 7)\ 4\sin\alpha\cos^3\alpha-4\sin^3\alpha\cos\alpha\right]$.

19. Проверить: 1) $\cos^4\alpha-\sin^4\alpha=\cos 2\alpha$; 2) $\sin^4 x+$ $+\cos^4 x=1-\frac{1}{2}\sin^2 2x$; 3) $\sin\alpha-\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin 2\alpha}$;

4) $1+\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}$; 5) $1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}$; 6) $2\sin\alpha+\sin 2\alpha=4\sin\cos^2\frac{\alpha}{2}$.

20. 1) Найти $\cos 2x$, если $\sin\alpha=0{,}6$. 2) Найти $\sin 2\alpha$, если $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{3}$.

$\left[1)\ 0{,}28;\ \ 2)\ -\frac{8}{9}\right]$.

21. Какая из функций: $\sin 2x$ и $2\sin x$ принимает большие значения, если $0<x<\frac{\pi}{2}$?

$[2\sin x>\sin 2x=2\sin x\cos x]$.

22. Для каких значений x $\operatorname{tg}2x>2\operatorname{tg}x$?

$[0°<\alpha<45°]$.

23. Выразить $\cos 2\alpha$ только через $\cos\alpha$. $[2\cos^2\alpha-1]$.

24. Как вывести формулы для вычисления: $\sin(\alpha+\beta+\gamma)$, $\cos(\alpha+\beta-\gamma)$, $\operatorname{tg}3\alpha$, $\sin 3\alpha$, $\cos 3\alpha$, $\sin 4\alpha$, $\cos 4\alpha$, $\operatorname{tg}4\alpha$.

[Последовательным применением формул сложения].

25. Дано: Найти:

1) $\sin\alpha=-\frac{1}{\sqrt{3}}$, $180°<\alpha<270°$, $\sin 2\alpha$. $\left[\frac{2}{3}\sqrt{2}\right]$.

2) $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$, $90°<\alpha<180°$, $\sin 2\alpha$. $\left[-\frac{24}{25}\right]$.

3) $|\operatorname{tg}\alpha|=5$, $[\operatorname{tg}2\alpha]$. $\left[\frac{5}{12}\right]$.

26. Выразить значения всех тригонометрических функций аргумента x через $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Какие выражения относительно $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ получаются?

$$\left[\sin x=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}};\right.$$

$$\cos x=\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}};\ \operatorname{tg}x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}};$$

получаются рациональные выражения$\left.\right]$.

27. Доказать, что если при некотором значении x $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ — рациональное число, то все тригонометрические функции от этого значения аргумента x — рациональные числа.

Указание. Следует воспользоваться выражениями тригонометрических функций, полученными в предшествующем упражнении.

28. Найти: $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}$.

$\left[\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{3}, \frac{3}{4}\right]$.

29. Найти выражения для: $\sin\frac{A}{2}$, $\cos\frac{A}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{A}{2}$, если $\cos A = m$. $\left[\sin\frac{A}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-m}{2}}, \cos\frac{A}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+m}{2}}, \operatorname{tg}\frac{A}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-m}{1+m}}\right]$.

30. Найти все тригонометрические функции угла α, если $\cos 2\alpha=\frac{15}{17}$ и: 1) $0°<2\alpha<180°$; 2) $180°<2\alpha<270°$.

$\left[1) \frac{1}{\sqrt{17}}, \frac{4}{\sqrt{17}}, \frac{1}{4}, 4, \frac{\sqrt{17}}{4}, \sqrt{17}; 2) \frac{1}{\sqrt{17}}, -\frac{4}{\sqrt{17}}, -\frac{1}{4}, -4, -\frac{\sqrt{17}}{4}, \sqrt{17}\right]$.

31. Найти угол α треугольника, если: 1) $\sin^2\alpha - \cos^2\alpha=\frac{1}{2}$; 2) $\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{4}$.

[1) 60°, 120°; 2) 15°, 75°].

32. Решить уравнения: 1) $\operatorname{tg}2x=\operatorname{tg}x$; 2) $\sqrt{3}\sin\frac{x}{2}=1-\cos x$.

$\left[1) x=k\pi; 2) x=2k\pi, x=(-1)^k\frac{2\pi}{3}+2k\pi$ или $360°k, x=(-1)^k\cdot 120°+360°k\right]$.

§ 7. Преобразование суммы тригонометрических функций в произведение и обратно

1. В каком случае при вычислениях, в которых встречаются тригонометрические функции, бывает целесообразно заменять произведения суммами? Когда бывает полезно, наоборот, суммы заменять произведениями?

[При пользовании таблицами значений тригонометрических функций целесообразно произведения заменять

суммами, а при пользовании таблицами логарифмов тригонометрических функций, наоборот, суммы заменять произведениями].

2. Вычислить: 1) $\sin 75° \pm \sin 15°$; 2) $\cos 135° \pm \cos 45°$; 3) $\sin 135° + \cos\alpha$; 4) $\cos(45° + \alpha) + \cos(45° - \alpha)$.

[1) $\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $0, -\sqrt{2}$; 3) $2\cos\frac{45° + \alpha}{2}\cos\frac{45° - \alpha}{2}$; 4) $\sqrt{2}\cos\alpha$].

3. Представить в виде произведения: 1) $\sin 150° + \sin 230°$; 2) $\sin 320° - \sin 240°$; 3) $\cos 200° + \cos 300°$; 4) $\cos 135° - \cos 85°$; 5) $1 + \cos 70°$, $1 - \sin 40°$; 6) $\sin\alpha + \cos\alpha$; 7) $1 + \cos 3\alpha$; 8) $1 - \sin 4\alpha$; 9) $1 + \sin\alpha$; 10) $1 - \cos\alpha$; 11) $\frac{1}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}$; 12) $\sin(60° + \alpha) - \sin(60° - \alpha)$.

[6) $\sqrt{2}\cos(\alpha - 45°)$; 7) $2\cos^2\frac{3\alpha}{2}$; 8) $2\sin^2(45° - 2\alpha)$; 9) $2\cos^2\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right)$; 10) $2\sin^2\frac{\alpha}{2}$; 11) $2\cos\left(30° + \frac{\alpha}{4}\right)\cos\left(30° - \frac{\alpha}{4}\right)$; 12) $\sin\alpha$].

4. Упростить $\frac{\sin\alpha + \sin 5\alpha}{\cos\alpha + \cos 5\alpha}$. [$\operatorname{tg} 3\alpha$].

5. Доказать тождество: $\frac{\sin\frac{2}{3}\alpha + \sin\frac{4}{3}\alpha}{\cos\frac{2}{3}\alpha + \cos\frac{4}{3}\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$.

6. Выразить данные произведения через соответствующие суммы: 1) $\sin 40° \cdot \cos 16°$; 2) $\cos 64° \cdot \cos 38°$; 3) $\sin 50° \cdot \sin 20°$; 4) $\cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta)$.

[1) $\frac{1}{2}(\sin 56° + \sin 24°)$; 2) $\frac{1}{2}(\cos 102° + \cos 26°)$; 3) $-\frac{1}{2}(\cos 70° - \cos 30°)$; 4) $\frac{1}{2}(\cos 2\alpha + \cos 2\beta)$].

7. Привести к виду, удобному для логарифмирования: 1) $1 \pm \operatorname{tg} 38°$; 2) $1 - \operatorname{ctg} 44°$; 3) $\sqrt{3} + \operatorname{tg} 40°$; 4) $\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta$; 5) $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha$; 6) $\operatorname{tg} 15° + \sqrt{3}$; 7) $1 + \sqrt{3}\operatorname{tg} 20°$; 8) $1 - \operatorname{tg}^2\alpha$; 9) $1 - \operatorname{ctg}^2 20°$; 10) $\sin 20° - \cos 50°$; 11) $\sin 50° - 1$; 12) $1 - 2\cos^2 x$; 13) $1 - 2\sin^2 x$; 14) $\sin^2\alpha - \sin^2\beta$; 15) $\sin^2\alpha - \cos^2\beta$; 16) $\operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{tg}^2\beta$.

[1) $\frac{\sqrt{2}\sin(45^\circ \pm 38^\circ)}{\cos 38^\circ}$; 4) $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}$; 5) $\frac{2}{\sin 2\alpha}$; 8) $\frac{\cos 2\alpha}{\cos^2\alpha}$; 9) $-\frac{\cos 40^\circ}{\sin^2 20^\circ}$; 12) $-\cos 2x$; 13) $\cos 2x$; 14) $\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\alpha-\beta)$; 15) $-\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$; 16) $\frac{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}{\cos^2\alpha\cos^2\beta}$].

8. Упростить: 1) $\frac{\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}2\beta}{\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}2\beta}$; 2) $\frac{\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\gamma}{\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{ctg}\gamma}$.

[1) $-\frac{\sin 3\beta}{\sin\beta}$; 2) $-\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma$].

9. Представить в виде произведения: 1) $\sin(n+1)x+\sin(n-1)x$; 2) $\cos(n+1)x+\cos(n-1)x$.

[1) $2\sin nx\cos x$; 2) $2\cos nx\cos x$].

10*. Проверить: $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{2}{\cos 2\alpha}$ [1].

11*. Представить в виде произведения: 1) $1\pm 2\sin 46^\circ$; 2) $\sqrt{3}-2\sin 24^\circ$; 3) $1-4\cos^2 18^\circ$; 4) $3-4\sin^2 22$; 5) $\sin\alpha+\sqrt{3}\cos\alpha$; 6) $\cos 36^\circ+\sqrt{3}\sin 36^\circ$.

[5) $2\sin(\alpha+60^\circ)$].

12. Решить уравнения (корни представить в общем виде): 1) $\cos 4x+\cos 2x=0$; 2) $\sin 5x-\sin x=0$; 3) $\sin 3x+\sin x=2\cos x$; 4) $\operatorname{tg}5x+\operatorname{tg}3x=0$; 5) $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$.

[1) $\frac{\pi}{2}(2k+1), \pm\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}$; 2) $\pm\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}, \frac{k\pi}{2}$; 3) $\frac{\pi}{2}(2k+1), (-1)^k\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$; 4) $\frac{k\pi}{8}$; 5) $2k\pi$].

§ 8. Обратные тригонометрические функции

1. Какие понятия лежат в основе понятия функции?

[Понятия множества и соответствия].

2. По определению функции каждому допустимому значению аргумента x приводится в соответствие одно значение функции y. Может ли оказаться так, что одно и то же значение y будет соответствовать нескольким значениям x? Привести примеры.

[Может, например, в случае, если $y=x^2$, $y=\sin x$].

3. 1) Какое соответствие между двумя числовыми множествами называется взаимно однозначным? 2) Обяза-

[1] $\alpha \neq \pm\frac{\pi}{4}+k\pi$.

тельно ли соответствие между множеством значений аргумента и множеством значений функции должно быть взаимно однозначным?

[1) Каждому числу первого множества соответствует одно число второго, причем каждое число второго множества оказывается соответствующим одному числу первого. 2) Соответствие между значениями аргумента и функции может и не быть взаимно однозначным].

4. Каждому значению функции y можно считать поставленными в соответствие те значения аргумента x, для которых функция равна y. Такое соответствие называется обратным. Охарактеризовать обратное соответствие, выражаемое функцией: 1) $y = 3x$; 2) $y = x^2$; 3)* $y = |x|$.

[2) Каждому неотрицательному числу y соответствуют два числа x, равные по абсолютной величине, но противоположные по знаку, квадраты которых равны этому числу y].

5. 1) Как определяется функция $y = \arcsin x$? 2) Какие область определения и область значений имеет эта функция? 3) Чему равно выражение $\sin(\arcsin x)$? 4) Как изменяется функция $y = \arcsin x$ при изменении x от -1 до 1? 5) Как можно построить график функции $y = \arcsin x$? 6) Найти корни этой функции. 7) Для каких значений аргумента x соответствующие значения этой функции положительны? отрицательны? 8) Как изменяется значение этой функции при изменении знака аргумента?

[1) Дуга (угол), взятая в промежутке от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$, синус которой равен x. 2) Область определения — промежуток от -1 до 1, область значений — промежуток от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$. 3) x. 4) Возрастает от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$. 6) $x = 0$. 7) Положительны при $0 < x \leqslant 1$, отрицательны при $-1 \leqslant x < 0$. 8) $\arcsin(-x) = -\arcsin x$].

Ответить на аналогичные вопросы относительно функций: 1) $y = \arccos x$; 2) $y = \operatorname{arctg} x$; 3) $y = \operatorname{arcctg} x$.

6. Найти x, если:

1) $\arcsin x = \frac{1}{2}$; $-\frac{1}{2}$; 0; 1; -1; $\frac{\sqrt{3}}{2}$; $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$; $-\frac{\sqrt{2}}{2}$;

2) $\arccos x = 1; -1; 0; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

3) $\operatorname{arc\,tg} x = 0; 1; -1; \sqrt{3}; -\sqrt{3}; \frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{\sqrt{3}}$;

4) $\operatorname{arc\,ctg} x = 0; 1; -1; \sqrt{3}; -\sqrt{3}; \frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

7. Вычислить: 1) $\operatorname{arc\,tg} 1 + \operatorname{arc\,tg}\sqrt{3}$; 2) $\arccos 1 + 2\arcsin\frac{1}{2}$; 3) $\sin\left(\arccos\frac{4}{5}\right)$; 4) $\cos(\arcsin 0{,}6)$; 5) $\sin(\operatorname{arc\,tg} 1)$; 6) $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arc\,tg} 1 - \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$; 7) $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}$; 8 $\operatorname{arc\,tg}\frac{3}{4} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{7}$; 9) $\sin\left(\arcsin\frac{1}{2} + \arccos\frac{1}{2}\right)$.

[1) $\frac{7\pi}{12}$; 2) $\frac{\pi}{3}$; 3) $\frac{3}{5}$; 4) 0,8; 5) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 6) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}$; 7) $\frac{\pi}{4}$; 8) $\frac{\pi}{4}$; 9) 1].

8. Почему нельзя выбрать один и тот же промежуток для значений $\arcsin x$ и $\arccos x$?

[Потому что интервалы монотонности для функций $\operatorname{ars}\sin x$ и $\operatorname{ars}\cos x$ не совпадают].

9. Известно, что $-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2} < \operatorname{arc\,tg} x < \frac{\pi}{2}$. Почему $\arcsin x$ может принимать значения $\pm\frac{\pi}{2}$, а $\operatorname{arc\,tg} x$ этих значений принимать не может? $\left[\operatorname{tg}\left(\pm\frac{\pi}{2}\right)\right.$ не существует$\left.\right]$.

10. Почему нельзя написать $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2}{3}\pi$? Как надо исправить эту запись? $\left[\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}\right]$.

11. Как построить: $\arcsin 0{,}6$; $\arcsin(-0{,}6)$; $\arccos\frac{4}{5}$; $\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)$; $\operatorname{arc\,tg} 2$; $\operatorname{arc\,tg}(-2)$?

12. Найти: 1) $\arcsin\frac{1}{2}$; 2) $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})$; 3) $\arccos\frac{1}{2}$; 4) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$; 5) $2\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$; 6) $3\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$; 7) $\frac{1}{2}\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$; 8) $\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 9) $-\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 10) $-\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 11) $\operatorname{arcctg} 0$; 12) $\operatorname{arcctg}(-1)$.

[1) $\frac{\pi}{6}$; 2) $-\frac{\pi}{3}$; 3) $\frac{\pi}{3}$; 4) $\frac{2\pi}{3}$; 5) $\frac{2\pi}{3}$; 6) $-\frac{\pi}{2}$; 7) $\frac{\pi}{8}$; 8) $\frac{5\pi}{12}$; 9) $\frac{\pi}{3}$; 10) $-\frac{3\pi}{4}$; 11) $\frac{\pi}{2}$; 12) $\frac{3\pi}{4}$].

13. Вычислить: 1) $\operatorname{arctg} 1 - \frac{\pi}{4}$; 2) $\operatorname{arcctg}(-1) - \frac{3\pi}{4}$; 3) $\arccos 0 + \frac{\pi}{2}$; 4) $\arccos(-1) + \pi$.

[1) 0; 2) 0; 3) π; 4) 2π].

14. Представить x как функцию от y: 1) $y = \arcsin\frac{x}{4}$; 2) $y = 4\operatorname{arctg}\frac{x}{3}$; 3) $y = 7\arccos 2x$; 4) $y - 3 = 5\arcsin x$.

[1) $x = 4\sin y$; 2) $x = 3\operatorname{tg}\frac{y}{4}$; 3) $x = \frac{1}{2}\cos\frac{y}{7}$; 4) $x = \sin\frac{y-3}{5}$].

15. Представить x как функцию от y: 1) $y = \operatorname{tg} 3x$; 2) $y = 4\operatorname{tg} 3x$; 3) $y = 5\operatorname{tg}\frac{x}{3}$; 4) $y = m\sin nx$.

[1) $x = \frac{1}{3}\operatorname{arctg} y$; 2) $x = \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{y}{4}$; 3) $x = 3\operatorname{arctg}\frac{y}{5}$; 4) $x = \frac{1}{n}\arcsin\frac{y}{m}$].

16. Вычислить: 1) $\sin(\arcsin 0{,}5)$; 2) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 1{,}3)$; 3) $\operatorname{tg}(\arcsin 1)$; 4) $\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 5) $\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg}\sqrt{3})$; 6) $\operatorname{ctg}\left[\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$; 7) $\sin\left[\operatorname{arcctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right]$.

[1) 0,5; 2) 1,3; 3) не существует; 4) 1; 5) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; 6) -1; 7) $\frac{\sqrt{3}}{2}$].

17. Найти: 1) $\arcsin\left(\sin\frac{2}{3}\pi\right)$; 2) $\arccos\left(\cos\frac{2\pi}{5}\right)$;
3) $\operatorname{arctg}\left[\operatorname{tg}\left(-\frac{4}{5}\pi\right)\right]$; 4) $\arccos[\cos(-\pi)]$;
5) $\arccos(\cos 8\pi)$; 6) $\arccos(\cos 9\pi)$; 7) $\arcsin\left(\sin\frac{9}{4}\pi\right)$;
8) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{5}{4}\pi\right)$; 9) $\arccos\left(\cos\frac{5}{4}\pi\right)$.

$\left[1)\ \frac{2}{3}\pi;\ 2)\ \frac{2}{5}\pi;\ 3)\ \frac{\pi}{5};\ 4)\ \pi;\ 5)\ 0;\ 6)\ \pi;\ 7)\ \frac{\pi}{4};\ 8)\ \frac{\pi}{4};\ 9)\ \frac{3}{4}\pi\right]$.

18. Проверить: 1) $2\operatorname{arctg} 1 = 3\arcsin\frac{1}{2}$;
2) $3\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3} = \arcsin 1$; 3) $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} + \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} =$
$= \operatorname{arcctg} 0$; 4) $\frac{1}{2}\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{3}\arccos 0 = \operatorname{arctg}\sqrt{3}$.

19. Найти: 1) $\sin(2\arcsin x)$; 2) $\sin\left(\frac{1}{2}\arccos x\right)$.

$\left[1)\ 2x\sqrt{1-x^2};\ 2)\ \sqrt{\frac{1-x}{2}}\right]$.

20. Вычислить: 1) $\arcsin(-x) + \arcsin x$;
2) $\arccos(-x) + \arccos x$;
3) $\operatorname{arctg}(-x) + \operatorname{arctg} x$;
4) $\operatorname{arcctg}(-x) + \operatorname{arcctg} x$;
5) $\arccos(-0{,}5) + \arccos 0{,}5$;
6) $\arcsin 0{,}5 + \arccos 0{,}5$;
7) $\operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arcctg} 1$;
8) $\arccos m + \arcsin m$.

$\left[1)\ 0;\ 2)\ \pi;\ 3)\ 0;\ 4)\ \pi;\ 5)\ \pi;\ 6)\ \frac{\pi}{2};\ 7)\ \frac{\pi}{2};\ 8)\ \frac{\pi}{2}\right]$.

21. Найти x и y, если: 1) $\arcsin 0{,}8 = \arccos x = \operatorname{arctg} y$;
2) $\arccos m = \operatorname{arctg} x = \operatorname{arc\,sc} y$.

$\left[1)\ x = 0{,}6,\ y = \frac{4}{3};\ 2)\ x = \frac{\sqrt{1-m^2}}{m},\ y = \frac{1}{m}\right]$.

22. Найти: 1) $\sin(2\arcsin a)$; 2) $\sin(2\operatorname{arctg} b)$.

$\left[1)\ 2a\sqrt{1-a^2};\ 2)\ \frac{2b}{1+b^2}\right]$.

23. Проверить: 1) $2\arccos a = \arccos(2a^2-1)$, $a > 0$;
2) $2\arcsin b = \arccos(1-2b^2)$, $b > 0$.

24. Вычислить: 1) $\cos\left(\arccos\frac{1}{2}+\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 2) $\sin\left[\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\arcsin 1\right]$; 3) $\sin\left(\operatorname{arctg}\sqrt{3}-\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 4)* $\sin\left(2\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 5)* $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\sqrt{3}\right)$.

25. Сравнить по величине $\arcsin x$ и x, при $x>0$. [$\arcsin x > x$].

26. Какой смысл имеют выражения: 1) $\arcsin x^2$; 2) $(\arcsin x)^2$.

[1) Дуга, синус которой равен x^2; 2) квадрат числа, выражающего дугу, синус которой равен x].

27. В каких границах может заключаться дуга: 1) $2\arcsin x$? 2) $2\arccos x$?

[1) $-\pi \leqslant 2\arcsin x \leqslant \pi$; 2) $0 \leqslant 2\arccos x \leqslant 2\pi$].

28. Указать область определения каждой из данных функций: 1) $y=\arcsin 2x$; 2) $y=\operatorname{arctg}\frac{x}{5}$; 3) $y=\arccos\frac{x}{3}$; 4) $y=\operatorname{arctg}\sqrt{x}$; 5) $y=\arccos\sqrt{x}$; 6) $y=\operatorname{arctg}\frac{1}{x-3}$; 7) $y=\operatorname{arctg}\sqrt{x-5}$; 8) $y=\arcsin\frac{1}{x-2}$; 9) $y=\sqrt{\arcsin x}$; 10) $y=\operatorname{arctg}(1+x)$; 11) $y=\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$; 12) $y=\arcsin\frac{1}{x}$; 13) $y=\arccos(x-1)$; 14) $y=\arcsin\sqrt{2x}$.

[1) $-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$; 2) все действительные числа; 3) $-3\leqslant x\leqslant 3$; 4) $x\geqslant 0$; 5) $0\leqslant x\leqslant 1$; 6) $x\neq 3$; 7) $x\geqslant 5$; 8) $x\leqslant 1$, $x>3$; 9) $0\leqslant x\leqslant 1$; 10) все действительные числа; 11) $x\neq 0$; 12) $|x|\geqslant 1$; 13) $0\leqslant x\leqslant 2$; 14) $0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$].

29. Проверить: 1) $\sin\left(\arccos\frac{m}{n}\right)=\frac{\sqrt{n^2-m^2}}{n}$; 2) $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arcctg}\frac{m}{n}\right)=\frac{n}{m}$; 3) $\operatorname{tg}(\operatorname{arcsec}\sqrt{m})=\sqrt{m-1}$; 4) $\operatorname{tg}(\arcsin x)\cdot\cos(\arcsin x)=x$; 5) $\frac{\sin(\arccos x)}{\operatorname{tg}(\arccos x)}=x$.

30. Вычислить: 1) $\arcsin\frac{4}{7}+\arcsin\left(-\frac{4}{7}\right)$;
2) $\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)+\arccos\frac{2}{3}$; 3) $\operatorname{arctg}(-5)-\operatorname{arctg}5$;
4) $\arccos\sqrt{0{,}6}-\arccos\left(-\sqrt{0{,}6}\right)$; 5) $\operatorname{arcctg}(-2)+\operatorname{arctg}(-2)$.

[1) 0; 2) π; 3) $-2\operatorname{arctg}5$; 4) $-\pi+2\arccos\sqrt{0{,}6}$; 5) $\frac{\pi}{2}$].

31. Определить x, если: 1) $\arcsin\frac{3}{5}=\arccos x$;
2) $\arcsin\left(-\frac{4}{5}\right)=-\arccos x$; 3) $\operatorname{arctg}\sqrt{3}=\operatorname{arcctg}x$;
4) $\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=-\operatorname{arcctg}x$.

$\left[1)\ \frac{4}{5};\ 2)\ \frac{3}{5};\ 3)\ \frac{1}{\sqrt{3}};\ 4)\ \sqrt{3}\right]$.

32. Найти x, если: 1) $\arcsin(x-1)=\frac{\pi}{6}$;
2) $\arccos(3x+2)=\frac{\pi}{3}$; 3) $\arcsin x=\arccos\sqrt{x+1}$.

$\left[1)\ \frac{3}{2};\ 2)\ -\frac{1}{2};\ 3)\ 0,\ -1\right]$.

§ 9. Тригонометрические уравнения

1. В чем существенное различие между алгебраическими и тригонометрическими уравнениями?

[Тригонометрическое уравнение содержит неизвестное только под знаками тригонометрических функций. Если оно имеет корни, то их всегда бесконечное множество].

2. Каким общим приемом можно воспользоваться для решения тригонометрического уравнения, левая часть которого есть рациональное выражение от тригонометрических функций одного и того же аргумента, а правая часть 0?

[Можно все тригонометрические функции, встречающиеся в левой части уравнения, выразить через какую-нибудь одну, затем решить получившееся уравнение относительно этой функции и, наконец, по тригонометрической функции найти углы. Вообще необходимо испытание найденных решений].

3. Как решается тригонометрическое уравнение, левая часть которого — произведение множителей, содержащих неизвестное, а правая часть 0?

[Множители левой части, содержащие неизвестное, следует приравнять 0 и решить получившиеся уравнения. Может оказаться так, что при некоторых из найденных значений неизвестного левая часть уравнения теряет смысл. Эти значения не будут корнями данного уравнения].

4. Как следует решать тригонометрическое уравнение, левая часть которого — дробь, содержащая неизвестное в числителе и в знаменателе, а правая часть 0?

[Числитель дроби следует приравнять 0 и решить получившееся уравнение. Корнями данного уравнения являются те из найденных значений неизвестного, при которых левая часть не теряет смысла].

5. Тригонометрическое уравнение $\sin 2x = -1$ решено так: $2x = -90°$, $x = -45°$, $x_1 = -45° + 360°k$, $x_2 = 225° + 360°k$. Где ошибка?

[Правильное решение: $2x = -90° + 360°k$, $x = -45° + 180°k$].

6. Найти корни уравнений, принадлежащие указанным промежуткам: 1) $\sin 3x = \frac{1}{2}$, $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$; 2) $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $(0, \pi)$; 3) $\sin x = \cos x$, $(0, 2\pi)$; 4) $\sqrt{3}\operatorname{tg} 2x = 1$, $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$; 5) $\operatorname{ctg}\frac{x}{2} = -1$, $(0, \pi)$; 6) $\operatorname{ctg}\frac{x}{2} = -1$, $(-\pi, 0)$.

$\left[1) \frac{\pi}{18}, \frac{5}{18}\pi; 2) \frac{\pi}{12}; 3) \frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi; 4) \frac{\pi}{12}; 5)$ нет; $6) -\frac{\pi}{2}\right]$.

7. Найти значения аргумента x, если: 1) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\cos x = -\frac{1}{2}$; 3) $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$; 4) $\operatorname{ctg} x = +\sqrt{3}$; 5) $\sin x = -1$; 6) $\operatorname{tg} x = -1$; 7) $\cos x = -1$.

$\Big[1) (-1)^k \frac{\pi}{3} + k\pi; 2) \pm\frac{2}{3}\pi + 2k\pi; 3) -\frac{\pi}{6} + k\pi;$ $4) +\frac{\pi}{6} + k\pi; 5) -\frac{\pi}{2} + 2k\pi; 6) -\frac{\pi}{4} + k\pi; 7) \pi(2k+1)\Big]$.

8. Решить тригонометрические уравнения: 1) $\sin x = 0$; 2) $\cos x = 0$; 3) $\operatorname{tg} x = 0$; 4) $\operatorname{ctg} x = 0$; 5) $\cos 5x = 0$; 6) $\operatorname{tg}(-5x) = 0$; 7) $\sin\frac{x}{2} = 0$; 8) $\operatorname{ctg} 0{,}5x = 0$; 9) $\sin x =$

$= \frac{1}{2}$; 10) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$; 11) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; 12) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

13) $\operatorname{tg} x = -1$; 14) $\sin 3x = 1$; 15) $\cos 2x = -1$;

16) $\sin \frac{x}{3} = \frac{1}{2}$; 17) $\operatorname{tg}(x - 10) = -1$; 18) $\cos(2x - 5) = 0$;

19) $\sin(0{,}5x + 2) = 0$; 20) $3 \sin 6x = 6$.

[1) $k\pi$; 2) $\frac{\pi}{2}(2k + 1)$; 3) $k\pi$; 4) $\frac{\pi}{2}(2k + 1)$; 5) $\frac{\pi}{10}(2k+1)$;

6) $\frac{k\pi}{5}$; 7) $2k\pi$; 8) $\pi(2k + 1)$; 9) $(-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi$; 10) $\frac{\pi}{3} + k\pi$;

11) $(-1)^k \frac{\pi}{3} + k\pi$; 12) $\pm\frac{5}{6}\pi + 2k\pi$; 13) $-\frac{\pi}{4} + k\pi$;

14) $\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}k\pi$; 15) $\frac{\pi}{2}(2k + 1)$; 16) $(-1)^k\frac{\pi}{2} + 3k\pi$;

17) $10 - \frac{\pi}{4} + k\pi$; 18) $\frac{5}{2} + \frac{\pi}{4}(2k + 1)$; 19) $-4 + 2k\pi$;

20) нет корней].

9. Какой смысл придается символам: 1) $\operatorname{Arc}\sin a$? 2) $\operatorname{Arc}\cos a$? 3) $\operatorname{Arc}\operatorname{tg} a$? 4) $\operatorname{Arc}\operatorname{ctg} a$?

[1) $\operatorname{Arc}\sin a$ — общий вид дуг (углов), синус которых равен a].

10. Найти общий вид дуг x, если: 1) $\sin x = a$; 2) $\sin \frac{x}{2} = b$; 3) $\sin 3x = p$; 4) $\cos x = a$; 5) $\cos(x + a) = b$; 6) $\operatorname{tg}(x - a) = b$; 7) $\operatorname{tg}(3x - a) = p$.

[1) $x = m\pi + (-1)^m \arcsin a$; 2) $x = 2m\pi + (-1)^m \cdot 2 \arcsin b$; 3) $x = \frac{m\pi}{3} + (-1)^m \frac{\arcsin p}{3}$;

4) $x = 2m\pi \pm \arccos a$; 5) $x = 2m\pi \pm \arccos b - a$;

6) $x = m\pi + \operatorname{arc}\operatorname{tg} b + a$; 7) $x = \frac{m\pi}{3} + \frac{1}{3}\operatorname{arc}\operatorname{tg} p + \frac{a}{3}$].

11. Найти: 1) $\operatorname{Arc}\sin 0$; 2) $\operatorname{Arc}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\operatorname{Arc}\cos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

4) $\operatorname{Arc}\operatorname{tg}(-1)$; 5) $\operatorname{Arc}\operatorname{ctg}(-1)$; 6) 3) $\operatorname{Arc}\operatorname{ctg}\sqrt{3}$;

7) $\operatorname{arc}\operatorname{ctg}(-\sqrt{3})$.

[1) $k\pi$; 2) $\pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi$; 3) $\pm\frac{5}{6}\pi + 2k\pi$; 4) $-\frac{\pi}{4} + k\pi$;

5) $\frac{3}{4}\pi + k\pi$; 6) $\frac{\pi}{6} + k\pi$; 7) $\frac{5}{6}\pi + k\pi$].

12. Найти корни уравнений: 1) $\sin x \operatorname{ctg} x = 1$; 2) $\cos^2 2x = \frac{1}{4}$; 3) $\cos^2 x - \cos x + \frac{1}{4} = 0$; 4) $\sin^2 x - 3\sin x + 2 = 0$; 5) $2\sin^2 x - 3\sin x - 2 = 0$; 6) $\cos^2 x + \cos x - 6 = 0$.

[1) Нет корней; 2) $x_1 = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $x_2 = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$; 3) $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$; 4) $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$; 5) $(-1)^k\left(-\frac{\pi}{6}\right) + k\pi$; 6) нет корней].

13. Какая существует связь между двумя углами x_1 и x_2, если известно, что: 1) синусы этих углов равны? 2) косинусы их равны? 3) тангенсы равны? 4) котангенсы равны?

[1) $x_1 + x_2 = \pi(2k+1)$ или $x_1 - x_2 = 2k\pi$; 2) $x_1 + x_2 = 2k\pi$ или $x_1 - x_2 = 2k\pi$; 3) и 4) $x_1 - x_2 = k\pi$].

14. Для каких углов (x): 1) $\sin x$ равен $\cos x$? 2) $\sin x$ равен $\operatorname{tg} x$? 3) $\operatorname{tg} x$ равен $\operatorname{ctg} x$? 4) $\cos x$ равен $\operatorname{ctg} x$?

$\left[1) \frac{\pi}{4} + k\pi;\ 2)\ k\pi;\ 3) \frac{\pi}{4}(4k+1);\ 4) \frac{\pi}{2}(2k+1)\right]$.

15. Показать, что не существует угла x, для которого: 1) $\sin x$ равен $\sec x$; 2) $\cos x$ равен $\operatorname{csc} x$.

[1) Если бы $\sin x = \sec x$, то было бы $\sin x = \frac{1}{\cos x}$, т. е. $\sin x \cos x = 1$ или $\sin 2x = 2$. 2) Аналогично предшествующему].

16. Найти зависимость между x и y, если: 1) $\sin x = -\sin y$; 2) $\cos x = -\cos y$; 3) $\operatorname{tg} x = -\operatorname{tg} y$.

[1) $x = k\pi - (-1)^k y$; 2) $x = 2k\pi \pm (\pi - y)$; 3) $x = k\pi - y$].

17. Решить уравнения: 1) $\sin 5x = \sin 4x$; 2) $\operatorname{tg} 5x = \operatorname{tg} 2x$; 3) $\sin 4x = -\sin x$; 4) $\sin 2x = \cos x$; 5) $\sin x = -\cos x$; 6) $\operatorname{tg} 3x = -\operatorname{ctg} x$; 7) $\sin(x-a) = \cos(x-a)$; 8) $\sin 3x = \cos 2x$.

$\left[1)\ 2k\pi,\ \frac{\pi}{9}(2k+1);\ 2)\ \frac{\pi}{3}k;\ 3)\ \frac{\pi}{3}(2k+1),\ \frac{\pi}{5}2k;\right.$ 4) $\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}k\pi$; 5) $-\frac{\pi}{4} + k\pi$; 6) $-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k$; $\left.7) \frac{\pi}{4} + a + k\pi;\ 8) \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ \frac{\pi}{10} + \frac{\pi}{5}2k\right]$.

18. Решить уравнения: 1) $\operatorname{tg} x(\sin x - \cos x) = 0$;
2) $\cos x(1 - \operatorname{tg} x) = 0$; 3) $\csc x \sin \frac{x}{2} = 0$;
4) $\sin x(1 + \sin^2 x) = 0$; 5) $\frac{\sin 2x}{\cos x} = 0$;
6) $\cos^2 x + \sin x \cos x = 1$;
7) $\sin^2 x + \cos x \sin x = 1$; 8) $(\sin x + \cos x)^2 = \sin 2x$;
9) $\operatorname{tg} 2x = 3 \operatorname{tg} x$; 10) $\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg}^2 x - 3 \operatorname{tg} x - 3 = 0$;
11) $\sin x = \frac{1}{\cos x}$; 12) $\cos x = \frac{1}{\sin x}$.

[1) $x_1 = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $x_2 = k\pi$; 2) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$; 3) нет корней; 4) $x = k\pi$; 5) $x = k\pi$; 6) $x_1 = k\pi$, $x_2 = \frac{\pi}{4} + k\pi$;
7) $x_1 = \pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $x_2 = \frac{\pi}{4} + k\pi$; 8) нет корней; 9) $x_1 = k\pi$, $x_2 = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi$; 10) $x_1 = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, $x_2 = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi$; 11) и 12) нет корней].

19. Решить уравнения: 1) $\frac{\sin 3x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = 0$; 2) $\frac{\cos x - \sqrt{5}}{\cos x} = \frac{\cos x - 10}{\cos x + \sqrt{5}}$; 3) $\cos 2x \cdot \operatorname{tg} x = 0$; 4) $\cos \frac{x}{2} + \sin x = 0$;
5) $1 + \cos x = \sin x$; 6) $\sec x \operatorname{ctg} x = 0$; 7) $\sin x \operatorname{tg} x \sec x = 0$;
8) $16^{\sin x} + 3 \cdot 4^{\sin x} = 0$; 9) $(7\sqrt{3})^{\cos x} = 1$;
10) $a^{\sin x - \sqrt{3}\cos x} = 1$.

[1) $\frac{\pi}{3}k$; 2) $\pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$; 3) $\pm\frac{\pi}{4} + k\pi$, $k\pi$; 4) $\pm\pi + 2k\pi$, $-(-1)^k\frac{\pi}{3} + 2k\pi$; 5) $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $\pi(2k+1)$; 6) нет корней; 7) πk; 8) нет корней; 9) $\frac{\pi}{2}(2k+1)$; 10) $\frac{\pi}{3} + k\pi$].

20. Как следует поступить, чтобы найти корни уравнения: $\frac{6\sin x + 5\cos x}{4\sin x + \cos x} = 2$?

[Числитель и знаменатель левой части уравнения следует разделить на $\cos x$ ($\cos x \neq 0$) и решить получившееся уравнение относительно $\operatorname{tg} x$].

21. Исключить x из системы уравнений:

1) $\begin{cases} \sin x \cdot \cos x = a, \\ \sin x + \cos x = b; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = a, \\ \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = b. \end{cases}$

[1) $1 + 2a = b^2$; 2) $a^2 = b + 2$].

22. Острые углы прямоугольного треугольника связаны соотношением: $\sin A + \cos B = \operatorname{tg} A$. Вычислить эти углы. [30°, 60°].

23. Найти $\sin y$ и $\cos x$, если $\begin{cases} \cos^2 x + \sin^2 y = a, \\ \cos^2 x - \sin^2 y = b. \end{cases}$

$$\left[\sin y = \pm\sqrt{\frac{a-b}{2}},\quad \cos x = \pm\sqrt{\frac{a+b}{2}}\right].$$

24. Найти главные значения x и y, если:

1) $\begin{cases} \cos x + \cos y = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}, \\ \cos x - \cos y = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = m, \\ \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = n. \end{cases}$

$$\left[1)\ \frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{3};\ 2)\ x = \operatorname{arc\,tg}\frac{m+n}{2},\ y = \operatorname{arc\,tg}\frac{m-n}{2}\right].$$

25. Показать, что уравнение $\operatorname{tg} x = 2x + 3$ имеет бесконечно много корней.

[Имеется бесконечно много точек пересечения графика функции $\operatorname{tg} x$ и графика функции $2x + 3$].

26. Сколько действительных корней имеет уравнение:

1) $\cos x = x$? 2) $\sin x = -x$? 3) $x = \operatorname{tg} x$? 4) $2^x = \sin x$?

5) $x^2 - \sin x = 0$? 6) $\frac{1}{x} - \sin x = 0$?

[1) 1; 2) 1; 3) бесконечно много; 4) бесконечно много; 5) 2; 6) бесконечно много].

27. 1) Какие корни имеет функция $y = \sin\frac{1}{x}$?

2) При каких значениях аргумента эта функция принимает значение 1?

3) При каких значениях аргумента принимает она значение — 1?

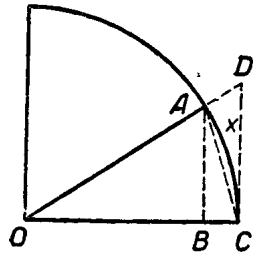
$$\left[1)\ x = \frac{1}{k\pi};\ 2)\ x = \frac{1}{\pi\left(2k + \frac{1}{2}\right)};\ 3)\ x = \frac{1}{\left(2k - \frac{1}{2}\right)\pi}\right].$$

28. 1) Доказать неравенства: $\sin x < x < \operatorname{tg} x$, где x — радианная мера острого угла.

2) Доказать неравенства $1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$, а затем неравенства: $1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$.

3) Как изменяются $\cos x$ и $\frac{\sin x}{x}$, если x, уменьшаясь, неограниченно приближается к 0?

4) Почему для достаточно малых значений x приближенно можно считать $\sin x = x$?



Черт. 9.

[1) Надо воспользоваться чертежом 9 и сравнить площади $\triangle AOC$, сектора AOC и $\triangle DOC$; 2) следует воспользоваться предшествующими неравенствами; 3) $\cos x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$, $\frac{\sin x}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$; 4) на основании того, что $\frac{\sin x}{x} \longrightarrow 1$ при $x \to 0$].

§ 10. Задачи

1. Заполнить таблицу:

(a и b — катеты прямоугольного треугольника, c — гипотенуза его, α — угол, образованный катетом b и гипотенузой c, β — угол, образованный катетом a и гипотенузой c).

a	b	c	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\sin\beta$	$\cos\beta$	$\operatorname{tg}\beta$	$\operatorname{ctg}\beta$
3	4								
12	16								
0,6		1							
	5	13							

2. Вычислить тригонометрические функции угла при вершине и угла при основании равнобедренного треугольника, боковая сторона которого 1,3 *см*, а высота 1,2 *см*.

3. Боковая сторона равнобедренного треугольника в четыре раза длиннее основания. Найти тригонометрические функции углов этого треугольника.

4. Как построить отрезок, равный: 1) $a\sin\alpha$; 2) $a\cos\alpha$; 3) $\frac{a}{\cos\alpha}$; 4) $\frac{a}{\cos^2\alpha}$; 5) $a\cos\alpha - b$; 6) $\sqrt{ab\cos\alpha}$ по данным a, b и α?

Указания. 1) Следует построить прямоугольный треугольник по гипотенузе a и углу α. Противолежащий углу катет и будет искомым отрезком. 3) Нужно по-

строить прямоугольный треугольник по катету a и углу α. 4) Построить $\frac{a}{\cos\alpha}$: $\cos\alpha$. 6) Построить $\sqrt{ax}$, где $x = b\cos\alpha$.

5. Вычислить сторону равностороннего треугольника, равновеликого треугольнику, имеющему две стороны a и b и угол между ними, равный 60°. $[x = \sqrt{ab}]$.

6. В треугольнике даны две стороны a и b и угол C между ними. Найти высоты, проведенные к данным сторонам. $[h_a = b\sin C,\ h_b = a\sin C]$.

7. Снег, скопившийся зимой на односкатной крыше, весит P килограммов. Общая площадь крыши S *кв. м*. 1) С какой силой давит снег на 1 *кв. м* крыши, если угол наклона крыши равен φ? 2) Произвести вычисления: $P = 2$ *т*, $S = 20$ *кв. м*, $\varphi = 60°$.

[Силу $P : S$ следует разложить на две составляющих: перпендикулярную крыше и параллельную ей. Перпендикулярная составляющая и есть искомое давление $x = \frac{P}{S}\cos\varphi$, 2) $x = 50$ *кг* на 1 *кв. м*].

8. Луч света падает на поверхность льда под углом в 30°. Найти синус угла преломления этого луча, если коэффициент преломления льда равен приближенно $\frac{4}{3}$. $[\sin x \approx 0{,}38]$.

9. Диаметр луны виден с земли под углом α. Найти диаметр луны, если расстояние от земли до центра луны равно d. $\left[2d\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2},\ d \approx 384\,000$ *км*, $\alpha = 1°2'\right]$.

10. Известны: расстояние между центрами Земли и Луны d и радиус Земли R. Под каким углом виден с Луны диаметр Земли? $\left[2\operatorname{arc\,tg}\frac{R}{d}\right]$.

11. Найти угол, образованный двумя касательными, проведенными из точки A к окружности радиуса r, если расстояние от центра окружности до точки A равно d. $\left[2\arcsin\frac{r}{d}\right]$.

12. В каком случае длина проекции отрезка AB на плоскость P: 1) меньше длины проектируемого отрезка? 2) равна ей? 3) равна 0?

13. Найти угол наклона проектируемого отрезка к оси проекций, если проектируемый отрезок и ось проекций

лежат в одной плоскости и длина отрезка вдвое больше длины его проекции. $[\pm 60° + 360°k]$.

14. Отрезок наклонен к оси проекций под углом в 30°, расстояния конечных точек его от оси проекций равны 10 *см* и 5,5 *см*. Найти длину отрезка (отрезок и ось проекций лежат в одной плоскости). [9 *см*].

15*. Шестиугольник, площадь которого 38 *кв. см*, наклонен к плоскости проекций под углом в 45°. Вычислить площадь проекции шестиугольника. $[19\sqrt{2}\ см \approx 27\ см]$.

16. Треугольник ABC со сторонами a и b и углом между ними γ спроектирован на плоскость, образующую с плоскостью, в которой лежит треугольник ABC, угол φ. Найти площадь проекции треугольника ABC.

$$\left[\frac{ab \sin\gamma \cos\varphi}{2}\right].$$

17. Даны две стороны треугольника. При каком значении заключенного между ними угла площадь треугольника будет наибольшей? [90°].

18. Какой вид принимают равенства $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=D$, где a, b, c — стороны треугольника, α, β, γ — противолежащие им углы, а D — диаметр описанной окружности: 1) в случае прямоугольного треугольника? 2) прямоугольного равнобедренного? 3) равностороннего треугольника?

$$\left[1)\ \frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\cos\alpha}=c=D;\ 2)\ \frac{2a}{\sqrt{2}}=\frac{2a}{\sqrt{2}}=c=D;\right.$$

$$\left.3)\ \frac{2a}{\sqrt{3}}=\frac{2a}{\sqrt{3}}=\frac{2a}{\sqrt{3}}=D\right].$$

19. Найти тригонометрические функции углов между диагональю прямоугольника и его сторонами, если стороны эти равны 40 *см* и 9 *см*.

$$\left[\frac{9}{41}, \frac{40}{41}, \frac{9}{40}, \frac{40}{9}, \frac{41}{9}, \frac{41}{40}\right].$$

20. Площадь прямоугольника S, одна сторона его a. Найти углы между сторонами и диагональю.

$$\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{a^2}{S}, \frac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,tg}\frac{a^2}{S}\right].$$

21. Показать, что площадь параллелограма $S=ab\sin\alpha$, где a и b — его стороны, а α — угол между ними.

22. Найти площадь параллелограма, если известны две его диагонали d_1 и d_2 и угол между ними φ.

$$\left[\frac{1}{2}\, d_1 d_2 \sin\varphi\right].$$

23. Площадь ромба 800 *кв. см*, острый угол 30°. Найти сторону ромба. [$x^2 \sin 30° = 800$, $x = 40$ *см*].

24. Известны периметр $2p$ и площадь ромба S. Найти его углы. $\left[\arcsin\frac{4S}{p^2},\ \pi - \arcsin\frac{4S}{p^2}\right]$.

25. По какой формуле можно вычислить углы ромба, если известны периметр его $2p$ и одна из диагоналей его d? $\left[2\arcsin\frac{d}{p},\ \pi - 2\arcsin\frac{d}{p}\right]$.

26. Две силы P и Q действуют под прямым углом. Найти величину их равнодействующей и углы, которые образует направление равнодействующей с направлениями данных сил.

$$\left[R = \sqrt{P^2 + Q^2},\ \alpha = \operatorname{arc\,tg}\frac{Q}{P},\ 90° - \alpha\right].$$

27. На тело действуют под прямым углом две силы P и Q. Известно, что сила P, равная 27 *кг*, образует с равнодействующей сил P и Q угол, равный 30°. Найти величину равнодействующей и второй составляющей Q.

$$\left[Q = P\operatorname{tg}\alpha = 9\sqrt{3}\ кг,\ R = \frac{P}{\cos\alpha} = 18\sqrt{3}\ кг\right].$$

28. Сила R разложена на две равные составляющие, образующие с ней угол φ. Найти каждую из этих составляющих. $\left[\frac{R}{2\cos\varphi}\right]$.

29. Какой равнодействующей можно заменить две равные силы P, действующие под углом φ друг к другу?

[$R = 2P\cos\frac{\varphi}{2}$. Равнодействующая направлена по биссектрисе угла, образованного направлениями сил].

30. Найти формулу, выражающую равнодействующую R двух сил P и Q, приложенных к телу A, если угол между направлениями этих сил φ. Рассмотреть случаи, когда данные силы действуют: 1) в одном направлении; 2) в противоположных направлениях; 3) по взаимно перпендикулярным направлениям.

$\left[R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\varphi}\right.$, 1) $\varphi = 0$, $R = P + Q$; 2) $\varphi = 180°$; $R = P - Q$; 3) $\varphi = 90°$, $\left.R = \sqrt{P^2 + Q^2}\right]$.

31. Известны два основания трапеции a и b, боковая сторона c и прилежащий к ней острый угол α. Вычислить площадь этой трапеции. $\left[S = \frac{1}{2}(a + b)\, c \sin\alpha\right]$.

32. Известны два основания прямоугольной трапеции a и b $(a > b)$ и острый угол α. Найти площадь этой трапеции. $\left[S = \frac{a+b}{2} \cdot (a - b)\ \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a^2 - b^2}{2}\ \mathrm{tg}\,\alpha\right]$.

33. Диаметр винта 4 *см*, а шаг винта (высота одного витка) равен 1 *см*. Как вычислить угол подъема винта и длину одного витка его? $\left[\alpha = \mathrm{arc\,tg}\ \frac{1}{4\pi},\ b = \sqrt{1 + 16\pi^2}\right]$.

34. В круг, радиус которого равен R, вписан правильный n-угольник и вокруг него описан правильный n-угольник. Выразить периметры и площади этих многоугольников через R и n.

$$\left[P_{\text{впис.}} = 2nR\sin\frac{\pi}{n},\ P_{\text{опис.}} = 2nR\ \mathrm{tg}\,\frac{\pi}{n},\right.$$

$$\left.S_{\text{впис.}} = nR^2 \sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n},\ S_{\text{опис.}} = nR^2\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{n}\right].$$

35. На основании выведенных формул доказать, что отношение площади круга к площади как вписанного в круг правильного многоугольника, так и описанного не зависит от радиуса круга.

$$\left[(\pi R^2) : \left(\pi R^2 \sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}\right) = \frac{1}{\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}}\right].$$

36. Известно, что $\frac{\sin\alpha}{\alpha}$, при $\alpha \to 0$, стремится к 1. Воспользовавшись этим, выяснить, к каким постоянным величинам стремятся периметр и площадь правильного вписанного в окружность многоугольника при неограниченном возрастании n.

$$\left[\lim_{n\to\infty} P_{\text{впис.}} = 2nR\sin\frac{\pi}{n} = \frac{2\pi R\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} \to 2\pi R;\ \lim_{n\to\infty} S_{\text{впис.}} \to \pi R^2\right].$$

37. Найти площадь круга, если известно, что его хорда, стягивающая дугу, равную α радиан, равна a.

$$\left[\pi R^2 = \pi\left(\frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\right)^2 = \frac{\pi a^2}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}\right].$$

38. Определить площадь сегмента, если величина его дуги α радиан, а радиус дуги R.

[Площадь соответствующего сектора $\frac{\pi R^2 \alpha}{2\pi}$, площадь треугольника $\frac{R^2 \sin \alpha}{2}$. Площадь сегмента $\frac{R^2}{2}(\alpha - \sin \alpha)$].

39. Найти отношение площадей правильного шестиугольника, вписанного в круг, и правильного шестиугольника, описанного около того же круга.

$$\left[r^2 : R^2 = \cos^2 \frac{180^\circ}{6} = \frac{3}{4}\right].$$

40. Длина дуги окружности, радиус которой 10 *см*, равна 100 *см*. Найти соответствующий центральный угол в радианах. [$\alpha = 10$ радиан].

41. Найти площадь кругового сегмента, если соответствующий центральный угол равен 120°, а радиус R.

$$\left[\frac{R^2}{12}(4\pi - 3\sqrt{3})\right].$$

42. Стороны основания прямоугольного параллелепипеда m и n, высота его H. Найти угол наклона диагонали параллелепипеда к плоскости основания.

$$\left[\operatorname{arc\,tg} \frac{H}{\sqrt{m^2+n^2}}\right].$$

43. Стороны основания прямоугольного параллелепипеда a и b. Диагональ его образует с плоскостью основания угол β. Найти диагональ, высоту и объем этого параллелепипеда. $\left[\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\cos \beta}, \sqrt{a^2+b^2}\operatorname{tg}\beta, ab\sqrt{a^2+b^2}\operatorname{tg}\beta\right]$.

44. Под каким углом пересекаются: 1) две диагонали куба? 2) диагональ куба и его ребро?

$$\left[1)\ 2\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{2}}{2};\ 2\operatorname{arc\,tg}\sqrt{2};\ 2)\ \operatorname{arc\,tg}\sqrt{2}\right].$$

45. Стороны оснований треугольной призмы — a, b и c. Боковое ребро ее l образует с плоскостью основания угол α. Вычислить объем этой призмы.

$$[v = l \sin \alpha \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}].$$

46. В правильной треугольной пирамиде боковое ребро, имеющее длину l, образует с плоскостью основания угол φ. Найти сторону основания пирамиды. $[l\sqrt{3}\cos\varphi]$.

47*. В правильной усеченной четырехугольной пира-

миде стороны оснований равны a и b. Угол, который образует ребро пирамиды с плоскостью основания, равен φ. Вычислить площадь диагонального сечения этой пирамиды. $\left[\frac{a^2-b^2}{2}\operatorname{tg}\varphi\right]$.

48. Найти площадь осевого сечения цилиндра, если диагональ этого сечения, равная d, образует с плоскостью основания угол φ. $\left[\frac{1}{2}d^2\sin 2\varphi\right]$.

49. Найти тригонометрические функции угла при вершине в осевом сечении прямого кругового конуса, если образующая конуса 20 *см*, а диаметр основания 24 *см*.

$\left[\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2} = \frac{24}{25},\ \cos x = \frac{7}{25},\ \operatorname{tg} x = \frac{24}{7}\right]$.

50. Высота конуса H, угол между образующей и плоскостью основания φ. Найти площадь осевого сечения. $[H^2\operatorname{ctg}\varphi]$.

51. Угол при вершине в осевом сечении конуса равен φ. Найти отношение площади основания этого конуса к его боковой поверхности. $\left[\sin\frac{\varphi}{2}\right]$.

52. Доказать, что площадь основания прямого кругового конуса равна произведению его боковой поверхности на косинус угла между образующей и плоскостью основания.

53. Найти выражение для полной поверхности и объема конуса, если известны образующая l и угол при вершине в осевом сечении φ.

$\left[\pi l^2\sin\frac{\varphi}{2}\left(1+\sin\frac{\varphi}{2}\right),\ \frac{1}{6}\pi l^3\sin\frac{\varphi}{2}\sin\varphi\right]$.

54. Прямоугольный треугольник, один из катетов которого a, вращается вокруг этого катета. Найти объем и боковую поверхность полученного тела вращения, если острый угол, прилежащий к катету a, равен β.

$\left[\frac{1}{3}\pi a^3\operatorname{tg}^2\beta,\ \pi a^2\frac{\operatorname{tg}3}{\cos\beta}\right]$.

55. Треугольник, две стороны которого a и b образуют угол γ, вращается вокруг стороны a. Найти объем тела вращения. $\left[\frac{1}{3}\pi ab^2\sin^2\gamma\right]$.